# 7

Maria Zaharia
Dan Zaharia

MINISTERUL EDUCAȚIEI

# MATEMATICĂ

## MANUAL PENTRU CLASA A VII-A

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

Manualul este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin
Ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017.

**119** – număr de telefon unic la nivel național pentru cazurile de abuz împotriva copiilor

**116.111** – numărul de telefon de asistență pentru copii

Maria Zaharia
Dan Zaharia

MINISTERUL EDUCAȚIEI

# MATEMATICĂ

## MANUAL PENTRU CLASA A VII-A

Editura Paralela 45

Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației nr. 5420/04.07.2024.
Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital.

| ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE: | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Anul | Numele elevului care a primit manualul | Clasa | Școala | Anul școlar | Starea manualului* | |
| | | | | | la primire | la returnare |
| 1. | | | | | | |
| 2. | | | | | | |
| 3. | | | | | | |
| 4. | | | | | | |

* Starea manualului se va înscrie folosind termenii: *nou, bun, îngrijit, nesatisfăcător, deteriorat*.
**Cadrele didactice vor controla dacă numele elevului este scris corect.**
**Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe manual.**

Editura Paralela 45

Referenți științifici:
Lect. univ. dr. Alexandru Negrescu, Universitatea Politehnica din București
Prof. gr. I Ion Tudor, Școala Gimnazială Băbana, jud. Argeș

ISBN 978-973-47-4153-3

Redactare: Andreea Roșca
Corectură: Ramona Rossall
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Design copertă: Mirona Pintilie
Pregătire de tipar: Marius Badea

Credite foto: shutterstock.com, dreamstime.com, wikipedia.org
Materiale video și audio, digitalizare:
EDITSOFT & SERVICES



**COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ**
EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

# CUPRINS

# Instrucțiuni de utilizare a manualului în format digital și tipărit

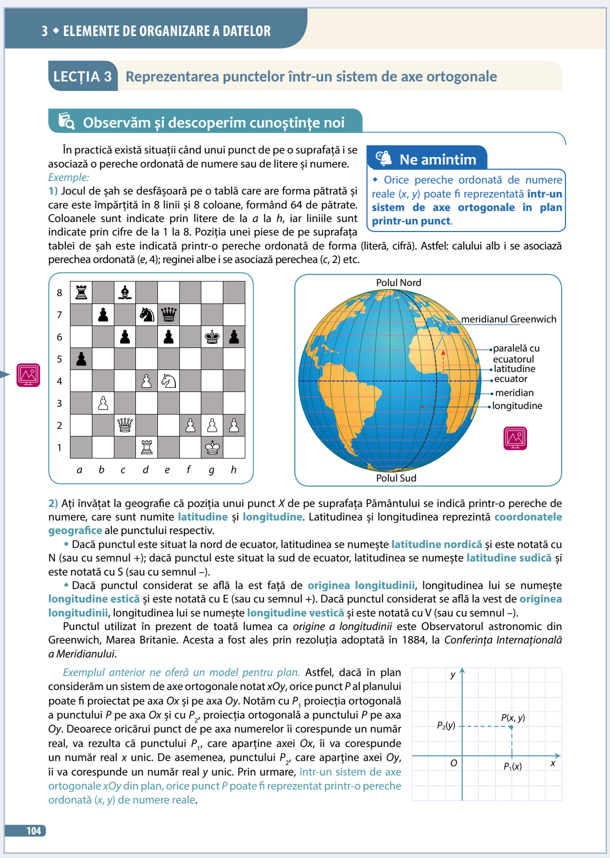
**Varianta digitală** a manualului cuprinde integral conținutul variantei tipărite și, în plus, o serie de activități multimedia interactive, care vor face învățarea mult mai plăcută și mai ușoară.

**Simbolurile care indică activitățile multimedia interactive de învățare:**

### AMII static
Activarea acestui buton permite vizualizarea optimizată a secvenței din manual.

### AMII animat
Activarea acestui buton permite vizualizarea unui filmuleț, pentru care se pot controla începerea/întreruperea (prin butonul Start/Pauză), volumul și maximizarea ecranului.

### AMII interactiv
Activarea acestui buton permite vizualizarea unor secvențe educaționale cu grad înalt de interactivitate, la finalul cărora este dat un feedback imediat. Exercițiile marcate cu acest simbol pot fi de tipul: completare, trage și plasează, bifarea variantei corecte, asocierea unor termeni din mai multe coloane.


3 ◆ ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

LECȚIA 3 Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În practică există situații când unui punct de pe o suprafață i se asociază o pereche ordonată de numere sau de litere și numere.

*Exemple:*

1) Jocul de șah se desfășoară pe o tablă care are forma pătrată și care este împărțită în 8 linii și 8 coloane, formând 64 de pătrate. Coloanele sunt indicate prin litere de la $a$ la $h$, iar liniile sunt indicate prin cifre de la 1 la 8. Poziția unei piese de pe suprafața tablei de șah este indicată printr-o pereche ordonată de forma (literă, cifră). Astfel: calului alb i se asociază perechea ordonată $(e, 4)$; reginei albe i se asociază perechea $(c, 2)$ etc.

Ne amintim

◆ Orice pereche ordonată de numere reale $(x, y)$ poate fi reprezentată **într-un sistem de axe ortogonale în plan printr-un punct**.



2) Ați învățat la geografie că poziția unui punct $X$ de pe suprafața Pământului se indică printr-o pereche de numere, care sunt numite **latitudine** și **longitudine**. Latitudinea și longitudinea reprezintă **coordonatele geografice** ale punctului respectiv.

◆ Dacă punctul este situat la nord de ecuator, latitudinea se numește **latitudine nordică** și este notată cu N (sau cu semnul +); dacă punctul este situat la sud de ecuator, latitudinea se numește **latitudine sudică** și este notată cu S (sau cu semnul –).

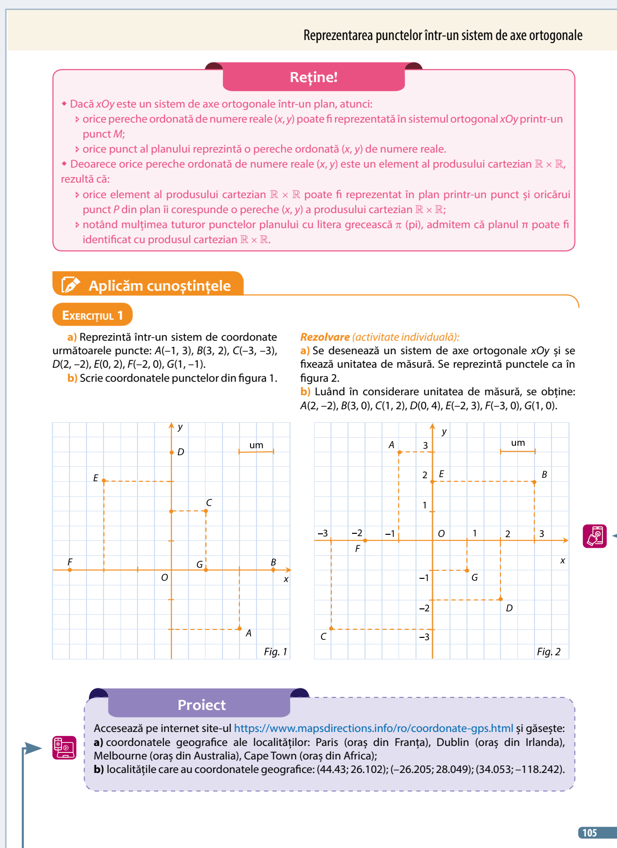
◆ Dacă punctul considerat se află la est față de **originea longitudinii**, longitudinea lui se numește **longitudine estică** și este notată cu E (sau cu semnul +). Dacă punctul considerat se află la vest de **originea longitudinii**, longitudinea lui se numește **longitudine vestică** și este notată cu V (sau cu semnul –).

Punctul utilizat în prezent de toată lumea ca *origine a longitudinii* este Observatorul astronomic din Greenwich, Marea Britanie. Acesta a fost ales prin rezoluția adoptată în 1884, la *Conferința Internațională a Meridianului*.

*Exemplul anterior ne oferă un model pentru plan.* Astfel, dacă în plan considerăm un sistem de axe ortogonale notat $xOy$, orice punct $P$ al planului poate fi proiectat pe axa $Ox$ și pe axa $Oy$. Notăm cu $P_1$ proiecția ortogonală a punctului $P$ pe axa $Ox$ și cu $P_2$, proiecția ortogonală a punctului $P$ pe axa $Oy$. Deoarece oricărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un număr real, va rezulta că punctului $P_1$, care aparține axei $Ox$, îi va corespunde un număr real $x$ unic. De asemenea, punctului $P_2$, care aparține axei $Oy$, îi va corespunde un număr real $y$ unic. Prin urmare, într-un sistem de axe ortogonale $xOy$ din plan, orice punct $P$ poate fi reprezentat printr-o pereche ordonată $(x, y)$ de numere reale.



104


Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

Reține!

◆ Dacă $xOy$ este un sistem de axe ortogonale într-un plan, atunci:
- orice pereche ordonată de numere reale $(x, y)$ poate fi reprezentată în sistemul ortogonal $xOy$ printr-un punct $M$;
- orice punct al planului reprezintă o pereche ordonată $(x, y)$ de numere reale.

◆ Deoarece orice pereche ordonată de numere reale $(x, y)$ este un element al produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, rezultă că:
- orice element al produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ poate fi reprezentat în plan printr-un punct și oricărui punct $P$ din plan îi corespunde o pereche $(x, y)$ a produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- notând mulțimea tuturor punctelor planului cu litera grecească $\pi$ (pi), admitem că planul $\pi$ poate fi identificat cu produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Aplicăm cunoștințele

EXERCIȚIUL 1

a) Reprezintă într-un sistem de coordonate următoarele puncte: $A(-1, 3)$, $B(3, 2)$, $C(-3, -3)$, $D(2, -2)$, $E(0, 2)$, $F(-2, 0)$, $G(1, -1)$.

b) Scrie coordonatele punctelor din figura 1.

*Rezolvare (activitate individuală):*

a) Se desenează un sistem de axe ortogonale $xOy$ și se fixează unitatea de măsură. Se reprezintă punctele ca în figura 2.

b) Luând în considerare unitatea de măsură, se obține: $A(2, -2)$, $B(3, 0)$, $C(1, 2)$, $D(0, 4)$, $E(-2, 3)$, $F(-3, 0)$, $G(1, 0)$.



Proiect

Accesează pe internet site-ul https://www.mapsdirections.info/ro/coordonate-gps.html și găsește:

**a)** coordonatele geografice ale localităților: Paris (oraș din Franța), Dublin (oraș din Irlanda), Melbourne (oraș din Australia), Cape Town (oraș din Africa);

**b)** localitățile care au coordonatele geografice: (44.43; 26.102); (–26.205; 28.049); (34.053; –118.242).

105

pentru activitate interactivă

pentru activitate statică, de observare a unei imagini semnificative

pentru activitate animată (film sau animație scurtă)

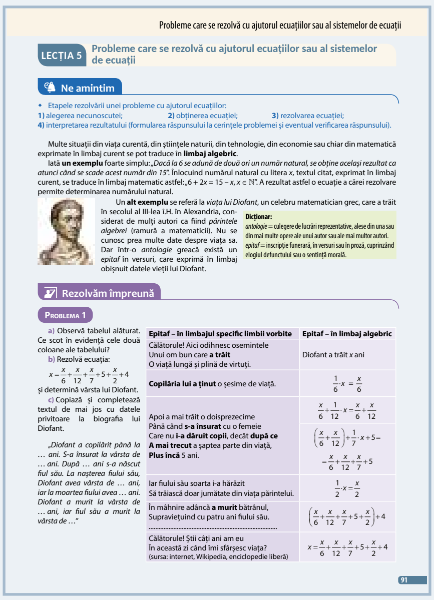
În manual, ***conținuturile*** selectate de programă, ca mijloace informaționale prin care se formează și se dezvoltă ***competențele generale*** și ***competențele specifice,*** sunt acoperite integral și organizate pe unități de învățare. Fiecare unitate de învățare se finalizează prin ***Evaluare***.

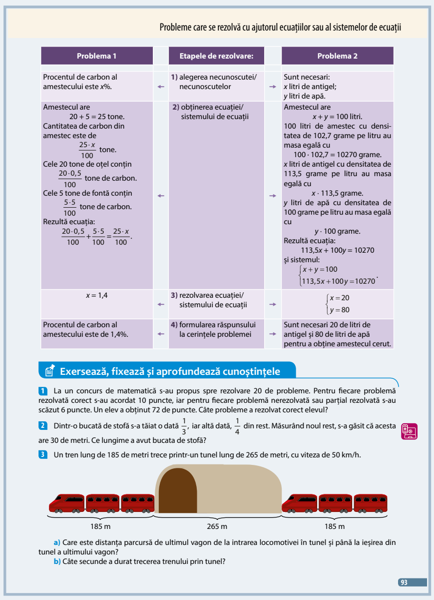
***Lecțiile de predare-învățare***, ca modalități de prezentare și de organizare a conținuturilor, se finalizează cu *Autoevaluare,* care acoperă întreaga gamă a tipologiei itemilor obiectivi, semiobiectivi și subiectivi. Secvențele metodice ale unei lecții sunt: *Ne amintim*, *Rezolvăm împreună*, *Observăm și descoperim cunoștințe noi*, *Reține*, *Aplicăm cunoștințele*, *Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele.* Acestora li se adaugă sugestii privind organizarea activității de predare-învățare: *individuală*, *pe grupe* și *frontală*, precum și *exerciții și probleme practic-aplicative*. În structura fiecărei lecții s-a folosit un suport intuitiv bine dozat, prin care se valorifică experiențele de învățare ale elevilor, se dezvoltă competențele achiziționate în anii anteriori, se stimulează gândirea și imaginația, se îmbogățește bagajul de reprezentări matematice, se formează și se dezvoltă competențe de realizare a unor conexiuni intradisciplinare și interdisciplinare. Astfel, se asigură un demers didactic coerent și eficient.

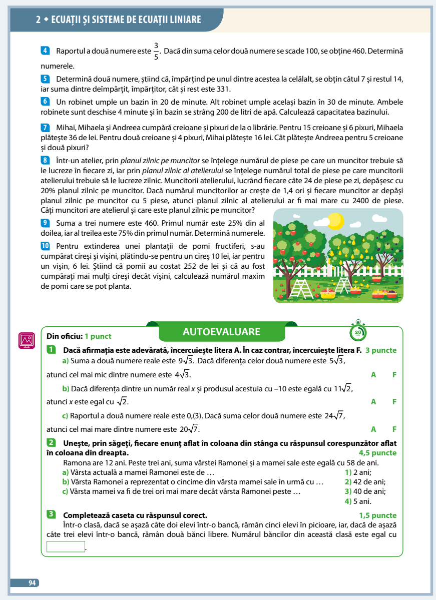
Manualul propune instrumente complementare de evaluare a activității: *portofoliul, proiectul, investigația, observarea sistematică a activității și a comportamentului elevului*.

Fiecare conținut din programa școlară se încheie cu ***Probleme recapitulative*** și ***Test de evaluare***. Manualul debutează cu ***Recapitulare și evaluare inițială*** și se încheie cu ***Recapitulare și evaluare finală***.

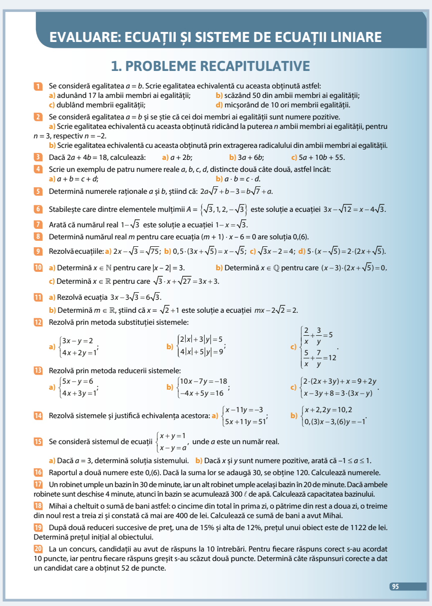
## LECȚIE DE PREDARE-ÎNVĂȚARE



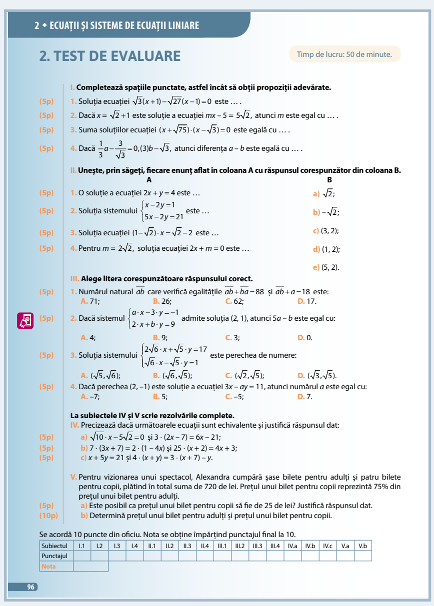




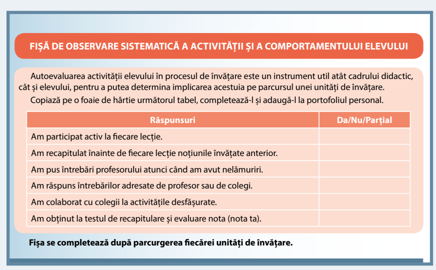
## RECAPITULARE



## EVALUARE



## FIȘĂ DE OBSERVARE SISTEMATICĂ a activității și a comportamentului elevului



# COMPETENȚE GENERALE ȘI SPECIFICE

**1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar**
1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui R
1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare
1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame
1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date
1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date
1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date
1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată

**2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural cuprinse în diverse surse informaționale**
2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare
2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora
2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc
2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri
2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia

**3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice**
3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare
3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora
3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme
3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme
3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii
3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic

**4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată**
4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare
4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor
4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere
4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic
4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea
4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic

**5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date**
5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare
5.3. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor
5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice
5.6. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice
5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic

**6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii**
6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale
6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare
6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)
6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere
6.5. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri
6.6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor
6.7. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic

# 1. PROBLEME RECAPITULATIVE

**1** Se consideră mulțimile:

$A = \{18, 5x, 2y + 1\}$ și $B = \{2y, 19, 30\}$.

a) Determină numerele naturale $x$ și $y$ pentru care cele două submulțimi sunt egale.

b) Scrie submulțimile mulțimii $A$.

c) Calculează $A \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus C$ și $C \setminus A$, unde $C = \{17, 18, 19\}$.

**2** Precizează care dintre următoarele mulțimi sunt finite:

a) $M_1 = \{0, 1, 3, 7\}$;

b) $M_2 = \{x \mid x$ este cifră în baza 10$\}$;

c) $M_3 = \mathbb{N}$;  d) $M_4 = \{a, b, c\}$;

e) $M_5 = \{x \in \mathbb{N} \mid 70 \vdots x\}$;  f) $M_6 = \mathbb{Z}$;

g) $M_7 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 5\}$;  h) $M_8 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 2\}$;

i) $M_9 = \mathbb{Q}$.

**3** Determină cardinalul mulțimii $X$, dacă:

a) $X = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le 10\}$;

b) $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 10\}$;

c) $X = \{4, 8, 12, \ldots, 400\}$;

d) $X = \{x \in \mathbb{N} \mid 1024 \le x < 2024\}$.

**4** Determină mulțimile:

a) $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ și $(n + 1) \mid 7\}$;

b) $B = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ și $(n - 1) \mid (n + 10)\}$;

c) $C = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ și $(n + 2) \mid (3n + 17)\}$;

d) $D = \{n \mid n \in \mathbb{N}$ și $(2n + 1) \mid (3n + 5)\}$.

**5** Calculează c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru fiecare grupă de numere:

a) 48, 72, 24;  b) 84, 210, 108;  c) 112, 154, 168.

**6** Determină numerele naturale $a$ și $b$, $a < b$, știind că:

a) $(a, b) = 7$ și $a + b = 56$;

b) $(a, b) = 6$ și $a \cdot b = 108$;

c) $(a, b) = 8$ și $[a, b] = 96$;

d) $[a, b] = 140$ și $a \cdot b = 980$.

**7** Precizează dacă următoarele perechi de numere sunt prime între ele, justificând afirmațiile făcute.

a) 321 și 154;

b) $4n + 5$ și $6n + 7$, $n \in \mathbb{N}$;

c) $n + 1$ și $2n^2 + n$, $n \in \mathbb{N}$.

**8** a) Dacă $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, calculează $\frac{3x - y}{2x + 3y}$.

b) Dacă $\frac{6x - 5y}{x + 5y} = \frac{3}{4}$, calculează $\frac{x}{y}$.

**9** Determină numerele $x$, $y$ și $z$, știind că:

a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ și $x + y + z = 70$;

b) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ și $5x + 2y + 3z = 93$.

**10** Dacă $a$, $b$ și $c$ sunt direct proporționale cu numerele 3, 5 și 7, calculează:

a) $\frac{b + c}{a}$;  b) $\frac{a + c}{b}$;

c) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ac}$;  d) $\frac{bc^2 - a^3}{abc}$.

**11** Determină $x$, dacă:

a) 2 și $x$ sunt direct proporționale cu 14 și 35;

b) 2 și $x$ sunt invers proporționale cu 42 și 12;

c) $x - 1$ și 2 sunt direct proporționale cu $x + 1$ și 3;

d) $x + 1$ și 5 sunt invers proporționale cu 4 și $x - 1$.

**12** a) Determină un număr, știind că 24% din acel număr este 1200.

b) Calculează 18% din 42700.

c) Determină numărul cu 25% mai mare decât 400.

**13** Într-o fructieră sunt 6 mere, 4 banane și 5 portocale. Alexia dorește să-i ofere Amaliei un fruct. Calculează care ar fi probabilitatea ca fructul oferit Amaliei să fie:

a) măr;  b) banană;  c) portocală.

**14** Efectuează calculele:

a) $(-1 - 3)^{10} : (-4)^8 + 56 : (-7) - (-3)^2 + 2^3 - 11$;

b) $[3^0 + (-3)]^2 \cdot (-6 + 8)^5 \cdot (10 - 12)^6 - 2^{10} \cdot (-3 + 5)^3$;

c) $1024 : (-4)^3 - (-15^1 - 1^{15}) \cdot (-1)^4 + 7 + 8 \cdot (-9) + (-10)^2$.

**15** Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $2 \cdot x + 3 = 30 - x$;

b) $5 \cdot (x + 2) = 3 \cdot (x - 1) + 33$;

c) $-3 \cdot |x + 2| + 17 = -4$;

d) $3 \cdot (5 - x) = -12 \cdot (3x + 2) + 6$.

**16** Suma a două numere întregi este 15. Dacă mărim primul număr cu 40 și micșorăm al doilea număr cu 40, atunci primul număr va fi de două ori mai mare decât al doilea număr. Determină cele două numere.

**17** Rezolvă inecuațiile în mulțimea numerelor întregi:

a) $|2x - 3| \le 5$;

b) $(x - 3) \cdot (2x + 1) \le 0$;

c) $x > 4$ și $-2 - (5 - 4x) < 21$;

d) $x + 4 \cdot (x - 5) \le 2 \cdot (2x - 1) - 9$ și $x \ge 7$.

**18** Efectuează calculele:

a) $-1{,}6 + \frac{3}{10} + \left(-\frac{6}{5}\right) + 1{,}0(3)$;

b) $0{,}5 + \left[\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{8}\right)\right] - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$;

c) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot (-0{,}5) + 0{,}25$;

d) $\frac{7}{3} + \frac{1}{24} \cdot \frac{56}{5} - \frac{32}{27} : \frac{8}{45} - \frac{4}{5}$.

**19** Rezolvă în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $3 \cdot (x + 1) = -6 \cdot x + 3$;

b) $\frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$;

c) $\frac{1}{4} \cdot \left[\left(3^{-1} - x\right) + 4^{-1}\right] = \frac{1}{48}$;

d) $4 - \left|0{,}5 - \frac{x-1}{2}\right| = 1$.

**20** Un obiect costa 1200 de lei. Prețul obiectului a crescut cu 15 procente.

a) Calculează prețul obiectului după scumpire.

b) După un timp, noul preț s-a micșorat cu un anumit procent. Calculează procentul cu care s-a micșorat prețul, dacă după ieftinire obiectul costă 1173 de lei.

**21** Punctul de intersecție a două drepte concurente este vârful a patru unghiuri. Calculează măsurile unghiurilor formate, dacă suma măsurilor:

a) a două dintre unghiuri este egală cu 140°;

b) a trei dintre unghiuri este egală cu 260°.

**22** Fie $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$ și $\measuredangle COA$ trei unghiuri în jurul unui punct $O$, astfel încât $\measuredangle AOB = 5x + 15°$, $\measuredangle BOC = 6x$ și $\measuredangle COA = x + 45°$.

a) Calculează măsurile unghiurilor $AOB$, $BOC$ și $COA$.

b) Dacă $OM$, $ON$ și $OP$ sunt bisectoarele unghiurilor $AOB$, $BOC$ și $COA$, calculează măsurile unghiurilor $MON$, $NOP$ și $MOP$.

**23** Se consideră două unghiuri adiacente suplementare. Dacă măsura unuia dintre unghiuri este egală cu 110°48′, calculează:

a) măsura celuilalt unghi;

b) măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri.

**24** În figura 1, punctele $M$, $O$, $N$ sunt coliniare, punctele $P$ și $Q$ sunt situate de aceeași parte a dreptei $MN$, iar semidreptele $OA$ și $OB$ sunt bisectoarele unghiurilor $MOP$ și $NOQ$.

a) Calculează măsura unghiului $POQ$, știind că $\measuredangle AOB = 135°$.

b) Știind că $\measuredangle MOP = 20°$ și $\measuredangle POQ = 90°$, calculează măsura unghiului $BOP$.

c) Calculează măsura unghiului $POQ$, știind că unghiul $MOP$ este complementul unghiului $NOQ$.

**25** În figura 2, dreptele $MN$ și $PQ$ sunt paralele. Calculează măsura unghiului $MRQ$, știind că $\measuredangle NMR = 20°$ și $\measuredangle PQR = 150°$.

**26** În figura 3, $MN \parallel PQ \parallel RS$. Calculează:

a) $\measuredangle NMP + \measuredangle MPR + \measuredangle PRS$; b) $\measuredangle MPR + \measuredangle PRM + \measuredangle RMP$.

**27** Pe un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ se consideră punctele $A$, $B$ și $C$, astfel încât măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CA}$ să fie invers proporționale cu numerele 2, 3 și 6.

a) Precizează dacă punctele $A$ și $B$ sunt diametral opuse.

b) Calculează măsurile arcelor $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CA}$.

c) Pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$ se ia un punct $M$, astfel încât $\measuredangle AOC = 2 \cdot \measuredangle COM$. Demonstrează că $\measuredangle AOM$ este unghi drept.

d) Calculează măsurile unghiurilor $BOM$ și $BOC$.

**28** Medianele $AA'$, $BB'$ și $CC'$ ale triunghiului $ABC$ sunt concurente în punctul $G$. Calculează:

a) $GA'$, dacă $AG = 8$ cm;

b) $BG$, dacă $GB' = 3$ cm;

c) $GC'$ și $GC$, dacă $CC' = 6$ cm.

**29** Se consideră un triunghi $MNP$, cu $\measuredangle MNP = 100°$, $\measuredangle MPN = 30°$ și înălțimile $MM'$, $M' \in NP$, respectiv $PP'$, $P' \in MN$. Calculează măsurile unghiurilor $M'MN$, $P'PN$ și $M'MP$.

**30** Mediatoarea laturii $AB$ a triunghiului $ABC$ intersectează latura $AC$ în punctul $D$, iar punctul $O$ este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$. Demonstrează că:

a) $AC = DC + DB$;

b) triunghiurile $AOD$ și $BOD$ au același perimetru.

**31** Fie $ABC$ un triunghi isoscel, cu $AB = AC$ și $AA'$ bisectoare a unui unghi exterior al triunghiului.

a) Demonstrează că $AA' \parallel BC$.

b) Știind că $\measuredangle A'AC = 130°$, calculează măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$.

**32** Triunghiul $ABC$ din figura 4 este echilateral și $MA \perp AB$, $NB \perp BC$, $PC \perp AC$ și $AM \equiv BN \equiv CP$. Arată că:

a) $\Delta MAC \equiv \Delta NBA$;

b) $\Delta MAC \equiv \Delta PCB$;

c) triunghiul $MNP$ este echilateral.

**33** Fie un triunghi dreptunghic $ABC$, cu $\measuredangle A = 90°$ și $\measuredangle B = 30°$.

a) Calculează $BC$, știind că $AC = 4$ cm.

b) Calculează $AC$, știind că $BC = 12$ cm.

c) Dacă punctul $M$ este mijlocul ipotenuzei, demonstrează că triunghiul $MAC$ este echilateral.

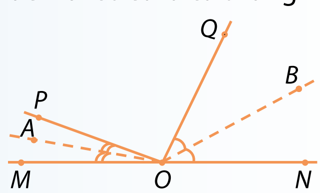


*Fig. 1*

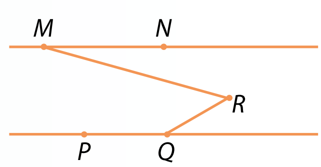


*Fig. 2*

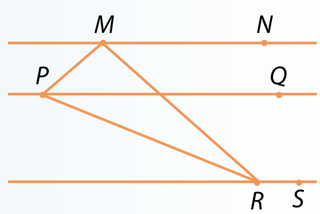


*Fig. 3*

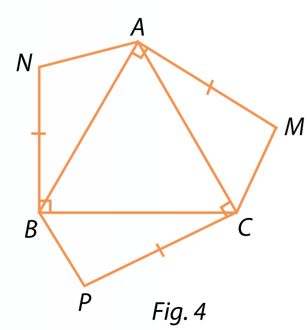


*Fig. 4*

# 2. TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ

## Test de evaluare inițială – algebră

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

(5p) 1. Numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii {2, 22, 222} este egal cu … .

(5p) 2. Opusul numărului rațional 0,(3) – 0,1(3) este … .

(5p) 3. Probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea {1, 2, 3, …, 40}, acesta să fie număr prim este … .

(5p) 4. Soluția ecuației $2 \cdot (5 - x) = -8 \cdot (3x + 2) + 4$ este … .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**

| | A | B |
|---|---|---|
| (5p) | 1. Dacă numerele 3 și 7 sunt direct proporționale cu numerele $x$ și 35, atunci $x$ este egal cu … | a) 6; |
| (5p) | 2. Dacă numerele 12 și 30 sunt invers proporționale cu numerele 35 și $y$, atunci $y$ este egal cu … | b) 12; |
| (5p) | 3. Dacă $\frac{x}{y}=\frac{2}{7}$, atunci valoarea raportului $\frac{5x+2y}{9x-2y}$ este egală cu … | c) 14; |
| (5p) | 4. Dacă $\frac{x+8y}{x-7y}=4$, atunci valoarea raportului $\frac{x}{y}$ este egală cu … | d) 15; |
| | | e) 10. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Cel mai mare divizor comun al numerelor 144, 180 și 360 este egal cu:
A. 48; B. 12; C. 36; D. 45.

(5p) 2. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 216, 288 și 432 este egal cu:
A. 576; B. 864; C. 1728; D. 648.

(5p) 3. Dacă $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2024\}$, atunci card $A$ este egal cu:
A. 2024; B. 4048; C. 4049; D. 1012.

(5p) 4. Dacă $M = \{n \in \mathbb{N} \mid (n + 1) \mid (3n + 8)\}$, atunci $M$ este mulțimea:
A. {0, 4}; B. {1, 5}; C. {0, 6}; D. {1, 7}.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

**IV.** Rezolvă în mulțimea numerelor raționale:

(15p) a) $|1 - 2 \cdot x| = 9$; b) $\frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}-x\right)+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{24}$; c) $x - 0,(3) = \frac{7}{3} - 0,6 \cdot x$.

**V.** Știind că $a=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)$ și $b=5,2:\left[0,2+4,(6)\cdot\left(2\frac{4}{7}-1\frac{1}{2}\right)\right]$, calculează:

(15p) a) $\left(a-\frac{1}{2}\cdot b\right)\cdot 10^{-1}$; b) $\left(a+\frac{1}{2}\cdot b\right):51$; c) $(2 \cdot a - b) \cdot 10^{-1}$.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

## Test de evaluare inițială – geometrie

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

(5p) 1. Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este egală cu … .

(5p) 2. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea catetei opuse unghiului cu măsura de $30^\circ$ este egală cu … .

(5p) 3. Notăm cu $a$, $b$, $c$ lungimile laturilor $BC$, $AC$ și $AB$ ale unui triunghi $ABC$. Dacă $a^2 + b^2 = c^2$, atunci triunghiul $ABC$ este …, cu măsura unghiului $C$ egală cu … .

(5p) 4. Criteriile de congruență a triunghiurilor dreptunghice sunt … .

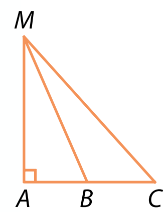
**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**

Două cercuri $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$, cu $r_1 < r_2$, se intersectează în punctele $A$ și $B$. Punctul $P$ este intersecția dreptelor $O_1O_2$ cu $AB$, $AB = r_1$ și $\sphericalangle O_2BA = 70^\circ$.

| | A | B |
|---|---|---|
| (5p) | 1. Triunghiul $AO_2B$ este … | a) dreptunghic; |
| (5p) | 2. Triunghiul $AO_1B$ este … | b) dreptunghic isoscel; |
| (5p) | 3. Triunghiul $APO_2$ este … | c) echilateral; |
| (5p) | 4. Triunghiul $AO_1O_2$ este … | d) scalen; |
| | | e) isoscel, dar nu echilateral. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. În figura alăturată, punctele $A$, $B$ și $C$ sunt coliniare și $\sphericalangle MAB$ este unghi drept. Distanța de la punctul $M$ la dreapta $BC$ este:




A. $MB$; B. $MC$; C. $MA$; D. $AB$.

(5p) 2. Pe un cerc cu centrul într-un punct $O$, se consideră două puncte $M$ și $N$, astfel încât măsura arcului mare $\overset{\frown}{MN}$ să fie egală cu 125% din măsura unui semicerc. Măsura unghiului la centru $MON$ este egală cu:

A. $225^\circ$; B. $125^\circ$; C. $75^\circ$; D. $135^\circ$.

(5p) 3. Se consideră două cercuri, $\mathcal{C}_1(O_1, 2\text{ cm})$ și $\mathcal{C}_2(O_2, 3\text{ cm})$. Dacă distanța dintre centrele celor două cercuri este $O_1O_2 = 4$ cm, atunci cele două cercuri sunt:

A. interioare; B. tangente exterioare; C. secante; D. exterioare.

(5p) 4. Un triunghi $MNP$ are vârful $M$ pe mediatoarea laturii $NP$ și vârful $P$, pe mediatoarea laturii $MN$. Triunghiul $MNP$ este:

A. dreptunghic; B. scalen; C. obtuzunghic; D. echilateral.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

IV. Fie $A$ și $B$ două puncte distincte și un punct $O$ exterior dreptei $AB$. Se notează cu $A'$ și $B'$ simetricele punctelor $A$, respectiv $B$ față de punctul $O$. Demonstrează că:

(15p) a) $\Delta AOB \equiv \Delta A'OB'$; b) $AB' \equiv A'B$; c) $AB \parallel A'B'$.

V. Fie un triunghi $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$ și $AB = 6$ cm. Se notează cu $M$ mijlocul segmentului $BC$, cu $M'$ se notează simetricul punctului $M$ față de dreapta $AC$ și $MM' \cap AC = \{O\}$.

(5p) a) Determină lungimea segmentului $BC$.

(5p) b) Calculează perimetrul triunghiului $ABM$.

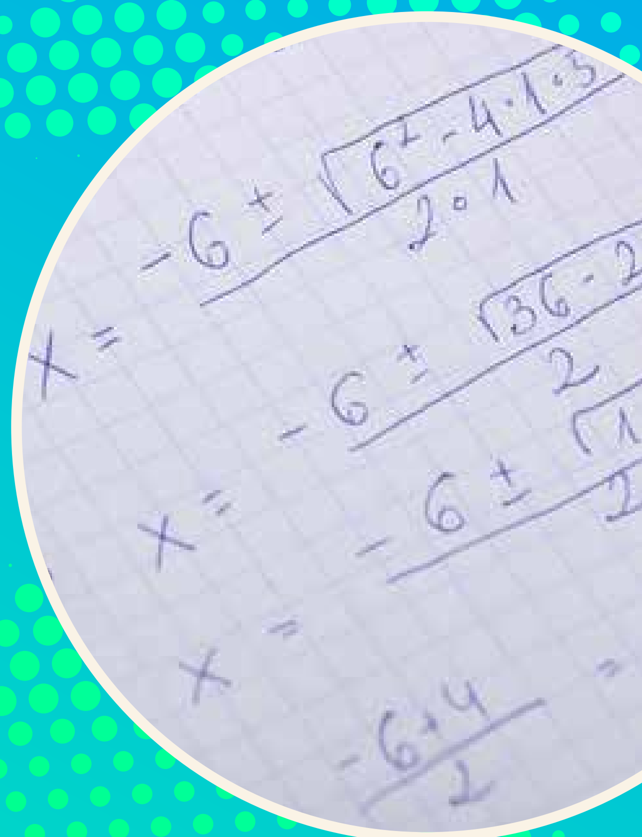
(5p) c) Demonstrează că $AM' \parallel BC$.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

1

# MULȚIMEA NUMERELOR REALE



**Unitatea: Rădăcina pătrată**
L1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural
L2. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional
L3. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical
Evaluarea unității de învățare

**Unitatea: Numere reale**
L1. Numere iraționale. Numere reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
L2. Modulul unui număr real
L3. Compararea și ordonarea numerelor reale
L4. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări
Evaluarea unității de învățare

**Unitatea: Operații cu numere reale**
L1. Introducere. Produs și cât de radicali. Raționalizare
L2. Adunarea și scăderea numerelor reale
L3. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale
L4. Puteri cu exponent număr întreg. Ordinea efectuării operațiilor
Evaluarea unității de învățare

**Unitatea: Operații cu numere reale în situații practice**
L1. Media aritmetică ponderată a $n$ numere reale, $n \geq 2$
L2. Media geometrică a două numere reale pozitive
L3. Ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$
L4. Activități practice și exemple din viața cotidiană
Evaluarea unității de învățare

**Evaluare: Mulțimea numerelor reale**
1. Probleme recapitulative
2. Test de evaluare

# UNITATEA: RĂDĂCINA PĂTRATĂ

## LECȚIA 1 Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

### Ne amintim

- mulțimile numerice $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$;
- puteri, reguli de calcul cu puteri;
- pătratul unui număr natural, pătrate perfecte;
- descompunerea în factori a unui număr natural.

*Exemple:*
$2 \in \mathbb{N}, 2 \in \mathbb{Z}, 2 \in \mathbb{Q}$, $\quad \frac{2}{3} \notin \mathbb{N}, \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}, \frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$.
$-3 \notin \mathbb{N}, -3 \in \mathbb{Z}, -3 \in \mathbb{Q}$,

### Rezolvăm împreună

**a)** Arată că numărul natural 676 este pătrat perfect.
**b)** Care este numărul natural al cărui pătrat este egal cu 676?

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*
**a)** Descompunem numărul 676 în factori primi și găsim $676 = 2^2 \cdot 13^2$. Aplicând proprietățile operațiilor cu puteri, rezultă că $676 = 2^2 \cdot 13^2 = (2 \cdot 13)^2 = 26^2$. Prin urmare, numărul natural 676 este pătrat perfect, fiind pătratul numărului 26.
**b)** Notăm cu $x$ numărul natural al cărui pătrat este egal cu 676. Rezultă că $x^2 = 676$. Conform punctului precedent, $x^2 = 26^2$ și $x = 26$. În acest context:
- 676 este pătratul lui $x$ și scriem $x^2 = 676$;
- $x$ este rădăcina pătrată a lui 676 sau $x$ este radical din 676 și scriem $x = \sqrt{676}$.

### Observăm și descoperim cunoștințe noi

Dacă numărul natural $p$ este *pătrat perfect*, atunci $p$ *este pătratul unui număr natural* $x$. Scriem $p = x^2$. În acest context, $x$ este *rădăcina pătrată a numărului natural* $p$. Scriem $x = \sqrt{p}$ și citim $x$ *este egal cu radical din* $p$. Deoarece $p = x^2$, din egalitatea $\sqrt{p} = x$ rezultă că $\sqrt{x^2} = x$.

*Exemplu:* Din rezolvarea anterioară rezultă că $\sqrt{676} = \sqrt{26^2} = 26$.

### Reține!

- Dacă un număr natural $p$ este pătratul unui număr natural $x$, atunci:
  - numărul natural $p$ este **pătrat perfect**, adică $p = x^2$;
  - numărul natural $x$ este **rădăcina pătrată** a lui $p$, adică $x = \sqrt{p}$;
  - egalitățile $p = x^2$ și $x = \sqrt{p}$ sunt **egalități echivalente**: $p = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{p}$.
- $\sqrt{x^2} = x$, oricare ar fi numărul natural $x$.

### Aplicăm cunoștințele

**EXERCIȚIUL 1**

**a)** Arată că numărul 1764 este pătrat perfect. **b)** Calculează rădăcina pătrată a numărului 1764.
**c)** Arată că numărul 1762 nu este pătrat perfect.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*
**a)** Descompunem numărul 1764 în factori primi și găsim că $1764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ sau $1764 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^2$. Rezultă că $1764 = 42^2$ și numărul 1764 este pătrat perfect, fiind pătratul numărului 42.

**b)** $\sqrt{1764} = \sqrt{42^2} = 42$.

**c)** Dacă $n$ este un număr natural, notăm cu $u(n)$ ultima sa cifră și cu $u(n^2)$, ultima cifră a numărului $n^2$.

Având în vedere că $u(n)$ poate fi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sau 9, din tabelul de mai jos deducem că ultima cifră a lui $n^2$ poate fi: 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.

| $u(n)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u(n^2)$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 6 | 5 | 6 | 9 | 4 | 1 |

Prin urmare, dacă ultima cifră a unui număr natural $n$ este 2, 3, 7 sau 8, numărul $n$ nu poate fi pătrat perfect. Deoarece ultima cifră a numărului 1762 este 2, rezultă că 1762 nu este pătrat perfect.

**EXERCIȚIUL 2**

Dacă $p$ și $q$ sunt două numere naturale pătrate perfecte, arată că $\sqrt{p \cdot q} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q}$.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Dacă $p$ și $q$ sunt numere naturale pătrate perfecte, atunci $p = x^2$ și $q = y^2$.

Rezultă: $\sqrt{p \cdot q} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{(x \cdot y)^2} = x \cdot y = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q}$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** **a)** Scrie pătratele numerelor 2, 12, 14.
**b)** Scrie rădăcina pătrată a numerelor: $3^4 \cdot 2^2$, 576, $2^4 \cdot 5^2$.

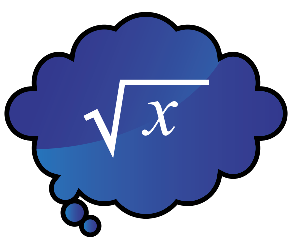
**2** Stabilește care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte:
**a)** 2, 1, 36, 49, 0, 121, 42, 289;
**b)** $\sqrt{64}$, $\sqrt{676}$, $\sqrt{3^6 \cdot 2^2}$, $\sqrt{5^4 \cdot 2^8}$.

**3** **a)** Determină cel mai mic număr pătrat perfect de trei cifre.
**b)** Calculează câte pătrate perfecte de trei cifre există.
**c)** Calculează: $\sqrt{384}$, $\sqrt{729}$, $\sqrt{529}$, $\sqrt{784}$, $\sqrt{194}$.

**4** Determină numerele naturale $x$ pentru care:
**a)** $x^2 = 49$; **b)** $x^2 = 225$; **c)** $2x^2 = 242$; **d)** $x^2 + 6 = 70$.

**5** Se consideră mulțimea $A = \{12, 2401, 169, 256, 144, 324, 48\}$.
**a)** Scrie elementele mulțimii $A$ care sunt pătrate perfecte.
**b)** Scrie rădăcina pătrată a numerelor naturale pătrate perfecte găsite la punctul a).

**6** **a)** Determină cifrele $x$ și $y$, astfel încât numărul $\sqrt{\overline{2xy}}$ să fie natural.
**b)** Determină cifrele $x$ și $y$, astfel încât numărul $\sqrt{\overline{3xy}}$ să fie natural.




**7** Folosind definiția rădăcinii pătrate, calculează:
**a)** $\sqrt{10^2}$, $\sqrt{2^4 \cdot 3^6}$, $\sqrt{5^4 \cdot 7^2}$, $\sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 11^2}$, $\sqrt{64}$;
**b)** $\sqrt{1369}$, $\sqrt{1764}$, $\sqrt{2916}$, $\sqrt{14641}$, $\sqrt{20736}$.

**8** **a)** Arată că $n = 225 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 224)$ este pătrat perfect.
**b)** Calculează rădăcina pătrată a lui $n$.

**9** Justifică de ce următoarele numere nu pot fi pătrate perfecte:
**a)** $5n + 2$; **b)** $5n + 3$; **c)** $5n + 7$; **d)** $5n + 8$; **e)** $10n + 2$; **f)** $10n + 3$; **g)** $10n + 7$; **h)** $10n + 8$.

**10** **a)** Scrie numerele naturale cuprinse între $2^2$ și $7^2$.
**b)** Câte numere naturale cuprinse între $2^2$ și $7^2$ există?
**c)** Determină câte numere naturale sunt între $x^2$ și $y^2$, unde $x$ și $y$ sunt numere naturale, cu $x < y$.

**11** **a)** Scrie pătratele perfecte cuprinse între $2^2$ și $7^2$.
**b)** Câte pătrate perfecte cuprinse între $2^2$ și $7^2$ există?
**c)** Calculează câte numere naturale, pătrate perfecte, sunt între $x^2$ și $y^2$, unde $x$ și $y$ sunt numere naturale, cu $x < y$.

## AUTOEVALUARE

Din oficiu: 1 punct

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** 3 puncte

a) Dacă un număr natural $n$ este pătratul unui număr natural $x$, atunci numărul natural $n$ nu este pătrat perfect. A F

b) Dacă $x \in \mathbb{N}$ și $x^2 = 576$, atunci $x$ este rădăcina pătrată a numărului 576. A F

c) Rădăcina pătrată a numărului 196 este numărul 13. A F

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** 4 puncte

| | |
|---|---|
| a) Dacă $\sqrt{\overline{2x6}} \in \mathbb{N}$, atunci $x$ este egal cu … | 1) 3; |
| b) Dacă $\sqrt{\overline{3x1}} \in \mathbb{N}$, atunci $x$ este egal cu … | 2) 4; |
| c) Dacă $\sqrt{\overline{4xy}} \in \mathbb{N}$ și $y^2 \le 1$, atunci $x$ este egal cu … | 3) 5; |
| d) $\sqrt{81}$ este egal cu … | 4) 6; |
| | 5) 9. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** 2 puncte

Numărul pătratelor perfecte mai mari decât 441 și mai mici decât 1225 este egal cu $\boxed{\phantom{00}}$.

# LECȚIA 2 Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

## Ne amintim

◆ **Aproximarea unui număr natural la unități, zeci, sute, mii, prin lipsă și prin adaos**

*Exemplu:*
Deoarece $370 < 376 < 380$, rezultă:
- $376 \approx 370$ (*aproximarea prin lipsă la zeci*);
- $376 \approx 380$ (*aproximarea prin adaos la zeci*).

Simbolul $\approx$ se citește „aproximativ egal cu".

◆ **Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural**

Dacă numărul natural $p$ este pătratul unui număr natural $x$, adică $p = x^2$, atunci *numărul natural $x$ este rădăcina pătrată a numărului natural $p$*, adică $x = \sqrt{p}$.

*Exemplu:*
$784 = 2^4 \cdot 7^2 = (2^2 \cdot 7^1)^2 = 28^2$;
$\sqrt{784} = \sqrt{28^2} = 28$.

## Rezolvăm împreună

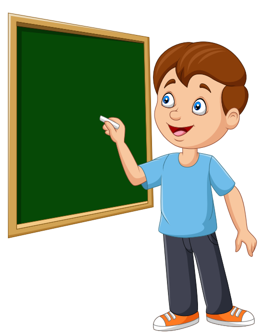
### EXERCIȚIUL 1

a) Calculează numărul $p$, știind că $p = x^2$ și $x = -\frac{3}{4}$.

b) Scrie numerele $p$ și $x$ sub formă de fracții zecimale.

c) Dintre următoarele trei propoziții, cea adevărată corespunde literei:

**A.** $x, p \in \mathbb{N}$; **B.** $x, p \in \mathbb{Z}$; **C.** $x, p \in \mathbb{Q}$, $x < 0$ și $p > 0$.



***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

a) Deoarece $x = -\frac{3}{4}$ și $p = x^2$, rezultă că $p = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$. Prin urmare, $p = \frac{9}{16}$.

b) Efectuând calculele, obținem $x = -\frac{3}{4} = -0{,}75$ și $p = (-0{,}75)^2 = 0{,}5625$.

**c)** Numerele $x$ și $p$ sunt numere raționale, $x$ este număr rațional negativ și $p$ este număr rațional pozitiv. Prin urmare, propoziția adevărată corespunde literei C.

**Observație:** Din rezolvarea anterioară observăm că, pentru numărul rațional pozitiv $p = \frac{9}{16}$, există două numere raționale $x$ $\left(\text{unul negativ, } x = -\frac{3}{4}\text{, și altul pozitiv, } x = \frac{3}{4}\right)$, astfel încât $p = x^2$. Numărul rațional pozitiv $x = \frac{3}{4}$ îl vom numi *rădăcina pătrată a numărului rațional* $p = \frac{9}{16}$. Prin urmare, $\sqrt{p} = x$, unde $x > 0$. Altfel spus, $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ sau $\sqrt{0,5625} = 0,75$.

## Exercițiul 2

Pe o hartă este reprezentat un parc dintr-un oraș (figura 1). Pentru pavarea aleii $BC$ este necesară calcularea lungimii acesteia. Se cunosc distanțele $AB = 13$ m și $AC = 20$ m.

**a)** Calculează lungimea aleii $BC$.

**b)** Arată că lungimea aleii $BC$ este mai mare decât 23,8 m și mai mică decât 23,9 m.

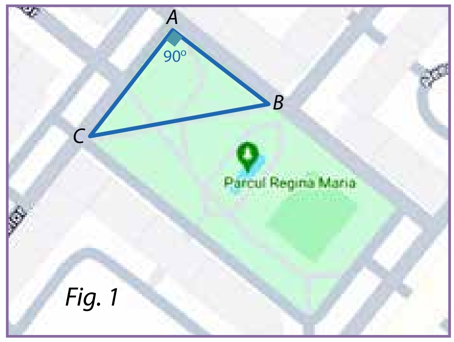


*Fig. 1*

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Triunghiul $ABC$ este dreptunghic, cu unghiul drept în $A$. Notând $BC = x$ m și aplicând teorema lui Pitagora, rezultă că $x^2 = 13^2 + 20^2 = 569$, de unde $x = \sqrt{569}$. Prin urmare, $x$ este rădăcina pătrată a numărului 569, deci $BC = \sqrt{569}$ m. Constatăm însă că, din punct de vedere practic, acest rezultat nu este folositor.

**b)** Avem de arătat că *lungimea aleii BC este mai mare decât 23,8 m și mai mică decât 23,9 m.*
Deoarece $23,8^2 = 566,44$, iar $23,9^2 = 571,21$ și $566,44 < 569 < 571,21$, rezultă că $\sqrt{566,44} < \sqrt{569} < \sqrt{571,21}$, de unde $\sqrt{23,8^2} < \sqrt{569} < \sqrt{23,9^2}$, adică $23,8 < \sqrt{569} < 23,9$. Prin urmare, $23,8\text{ m} < \sqrt{569}\text{ m} < 23,9\text{ m}$, de unde rezultă că $23,8\text{ m} < BC < 23,9$ m. Așadar, *lungimea aleii BC este mai mare decât 23,8 m și mai mică decât 23,9 m.*

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

**1.** Rezultatele obținute la punctul b) sunt utile din punct de vedere practic, pentru că ele dovedesc că aleea $BC$ are o lungime mai mare decât 23 m + 80 cm, dar mai mică decât 23 m + 90 cm:

$$23,80\text{ m} < BC < 23,90\text{ m}.$$

Altfel spus, am realizat estimarea lungimii aleii cu o eroare mai mică decât 10 cm. Totodată rezultă necesitatea găsirii unei metode de calculare ori a unei metode de estimare a rădăcinii pătrate.

**Dicționar:**
*estimare* = stabilirea valorii aproximative a unui bun sau a unui obiect.

$\sqrt{569} \approx ?$ $\quad \sqrt{2} \approx ?$ $\quad \sqrt{36} = ?$ $\quad \sqrt{0,36} = ?$ $\quad \sqrt{\ldots} \approx ?$

**2.** De asemenea, am arătat că $23,8 < \sqrt{569} < 23,9$. Rezultă că 23,8 este *aproximarea prin lipsă la zecimi*, iar 23,9 este *aproximarea prin adaos la zecimi* a rădăcinii pătrate a numărului 569.

Se scrie: $\sqrt{569} \approx 23,8$ (*aproximarea prin lipsă la zecimi*);

$\sqrt{569} \approx 23,9$ (*aproximarea prin adaos la zecimi*).

Observând că $23 < 23,8 < \sqrt{569} < 23,9 < 24$, rezultă că $23 < \sqrt{569} < 24$, de unde:

$\sqrt{569} \approx 23$ (*aproximarea prin lipsă la unități*);

$\sqrt{569} \approx 24$ (*aproximarea prin adaos la unități*).

În general: Dacă $p$ este aproximarea la unități a numărului real $\sqrt{x}$, unde $x$ este un număr natural, atunci rezultă că $p \leq \sqrt{x} < p + 1$, $\sqrt{x} \approx p$ (aproximarea prin lipsă la unități) și $\sqrt{x} \approx p + 1$ (aproximarea prin adaos la unități).

**Observații:**

**1.** Aproximarea la unități a rădăcinii pătrate a unui număr natural $x$ format din $2n - 1$ *sau* $2n$ cifre ($n \geq 1$) este un număr natural $p$ format din $n$ cifre.

*Demonstrație:*

**Cazul 1.** Numărul natural $x$ are una sau două cifre: $10^0 \le x < 10^2$ implică $1 \le \sqrt{x} < 10$, de unde rezultă că $p$ este un număr de o cifră.

**Cazul 2.** Numărul natural $x$ are trei sau patru cifre: $10^2 \le x < 10^4$ implică $10 \le \sqrt{x} < 100$, de unde rezultă că $p$ este un număr de două cifre.

**Cazul 3.** Numărul natural $x$ are cinci sau șase cifre: $10^4 \le x < 10^6$ implică $100 \le \sqrt{x} < 1000$, de unde rezultă că $p$ este un număr de trei cifre.

⋮

**Cazul $n$ ($n \ge 1$).** Numărul natural $x$ are $2n - 1$ sau $2n$ cifre: $10^{2n-2} \le x < 10^{2n}$ implică $10^{n-1} \le \sqrt{x} < 10^n$, de unde rezultă că $p$ este un număr natural de $n$ cifre.

**2.** Dacă $\overline{a_1a_2a_3...a_m}$ este un număr natural de $m$ cifre și $\sqrt{\overline{a_1a_2a_3...a_m}} \approx p$, pentru a afla numărul cifrelor numărului natural $p$ împărțim numărul $\overline{a_1a_2a_3...a_m}$ de la dreapta spre stânga în grupe de câte două cifre. Numărul cifrelor numărului natural $p$ este egal cu numărul grupelor formate.

| Exemplu | Împărțirea în grupe de câte două cifre | Numărul cifrelor lui $p$ | Concluzia |
|---|---|---|---|
| $\sqrt{372} \approx p$ | $\sqrt{3 \mid 72}$ | 2 | $\sqrt{372} \approx \overline{ab}$ |
| $\sqrt{4521} \approx p$ | $\sqrt{45 \mid 21}$ | 2 | $\sqrt{4521} \approx \overline{ab}$ |
| $\sqrt{26734} \approx p$ | $\sqrt{2 \mid 67 \mid 34}$ | 3 | $\sqrt{26734} \approx \overline{abc}$ |
| $\sqrt{915272} \approx p$ | $\sqrt{91 \mid 52 \mid 72}$ | 3 | $\sqrt{915272} \approx \overline{abc}$ |

**3.** Dacă $x$ este un număr natural format din una sau două cifre și $\sqrt{x} \approx p$, atunci $p$ are o cifră și $p$ este printre rădăcinile pătrate ale pătratelor perfecte: $0^2$, $1^2$, $2^2$, $3^2$, $4^2$, $5^2$, $6^2$, $7^2$, $8^2$ și $9^2$, adică ale numerelor 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 și 81.

| Exemplu | Demonstrație |
|---|---|
| $\sqrt{5} \approx 2$ | Din $4 < 5 < 9$ rezultă că $2^2 < 5 < 3^2$, de unde $\sqrt{2^2} < \sqrt{5} < \sqrt{3^2}$, adică $2 < \sqrt{5} < 3$. |
| $\sqrt{22} \approx 4$ | Din $16 < 22 < 25$ rezultă că $4^2 < 22 < 5^2$, de unde $\sqrt{4^2} < \sqrt{22} < \sqrt{5^2}$, adică $4 < \sqrt{22} < 5$. |
| $\sqrt{40} \approx 6$ | Din $36 < 40 < 49$ rezultă că $6^2 < 40 < 7^2$, de unde $\sqrt{6^2} < \sqrt{40} < \sqrt{7^2}$, adică $6 < \sqrt{40} < 7$. |
| $\sqrt{88} \approx 9$ | Din $81 < 88 < 100$ rezultă că $9^2 < 88 < 10^2$, de unde $\sqrt{9^2} < \sqrt{88} < \sqrt{10^2}$, adică $9 < \sqrt{88} < 10$. |

## Reține!

◆ **Rădăcina pătrată a unui număr rațional pozitiv $p$ este numărul pozitiv $\sqrt{p}$, al cărui pătrat este egal cu $p$.**

- Dacă $p \ge 0$ și $x \ge 0$, atunci $\sqrt{p} = x \Leftrightarrow p = x^2$.
- Dacă $x \ge 0$, atunci $\sqrt{x^2} = x$.
- Scrierea $\sqrt{p}$ oferă trei informații: $\begin{cases} p \ge 0 \\ \sqrt{p} \ge 0 \\ \left(\sqrt{p}\right)^2 = p \end{cases}$.

Rădăcina pătrată a unui număr negativ nu se definește (dacă $p < 0$, $\sqrt{p}$ nu are sens).

◆ Operația prin care se calculează rădăcina pătrată a unui număr pozitiv se numește **extragerea rădăcinii pătrate** din acel număr.

◆ **Rădăcina pătrată dintr-un număr natural care este pătrat perfect** se calculează utilizând descompunerea numărului în factori primi.

◆ **Rădăcina pătrată dintr-un număr natural care nu este pătrat perfect** se poate aproxima (prin lipsă sau prin adaos) cu o fracție zecimală finită.

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Aproximează numărul $\sqrt{569}$ prin lipsă și apoi prin adaos:

**a)** la zeci; **b)** la unități; **c)** la zecimi.

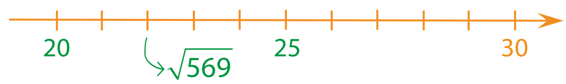
***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a) Aproximarea la zeci:** Dacă $\sqrt{569} \approx p$ și $p$ este număr natural, conform observației 2, rezultă că numărul $p$ are două cifre, adică $\sqrt{569} \approx \overline{ab}$. Deoarece $2 < \sqrt{5} < 3$, rezultă că $a = 2$ și $\sqrt{569} = \overline{2b}$. Din $20 \leq \overline{2b} < 30$ rezultă că $20 \leq \sqrt{569} < 30$ și, ca urmare, avem: $\sqrt{569} \approx 20$ (aproximarea prin lipsă la zeci) și $\sqrt{569} \approx 30$ (aproximarea prin adaos la zeci).

**b) Aproximarea la unități:**

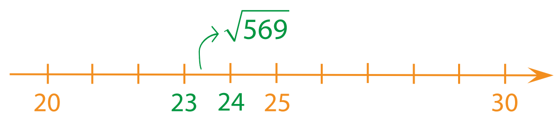
- Calculăm media aritmetică a aproximărilor la zeci: $\dfrac{20+30}{2} = 25$, și comparăm 25 cu $\sqrt{569}$.

Deoarece $25^2 = 625$ și $625 > 569$, rezultă că $\sqrt{625} > \sqrt{569}$, adică $25 > \sqrt{569}$. Prin urmare, $20 < \sqrt{569} < 25$.




- Calculăm media aritmetică a numerelor 20 și 25. Deoarece $\dfrac{20+25}{2} = 22,5$, comparăm numerele 22 și 23 cu $\sqrt{569}$. Deoarece $22^2 = 484$ și $484 < 569$, rezultă că $\sqrt{484} < \sqrt{569}$, adică $22 < \sqrt{569}$. Deoarece $23^2 = 529$ și $529 < 569$, rezultă că $\sqrt{529} < \sqrt{569}$, adică $23 < \sqrt{569}$.

Prin urmare, $23 < \sqrt{569} < 25$.




- Calculăm media aritmetică a numerelor 23 și 25: $\dfrac{23+25}{2} = 24$, și comparăm 24 cu $\sqrt{569}$. Deoarece $24^2 = 576$ și $576 > 569$, rezultă că $\sqrt{576} > \sqrt{569}$, adică $24 > \sqrt{569}$.

Prin urmare, $23 < \sqrt{569} < 24$.

Rezultă: $\sqrt{569} \approx 23$ (aproximarea la unități prin lipsă); $\sqrt{569} \approx 24$ (aproximarea la unități prin adaos).

**c) Aproximarea la zecimi:**

- Calculăm media aritmetică a aproximărilor la unități: $\dfrac{23+24}{2} = 23,5$, și comparăm 23,5 cu $\sqrt{569}$.

Deoarece $23,5^2 = 552,25$ și $552,25 < 569$, rezultă că $\sqrt{552,25} < \sqrt{569}$, adică $23,5 < \sqrt{569}$.

Prin urmare, $23,5 < \sqrt{569} < 24$.


- Calculăm media aritmetică a numerelor 23,5 și 24. Aceasta este 23,75 și comparăm numerele 23,7 și 23,8 cu $\sqrt{569}$. Deoarece $23,7^2 = 561,69$ și $561,69 < 569$, rezultă că $\sqrt{561,69} < \sqrt{569}$, adică $23,7 < \sqrt{569}$. Deoarece $23,8^2 = 566,44$ și $566,44 < 569$, rezultă că $\sqrt{566,44} < \sqrt{569}$, adică $23,8 < \sqrt{569}$.

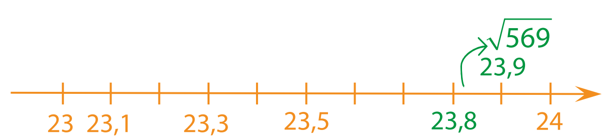
Prin urmare, $23,8 < \sqrt{569} < 24$.

- Calculăm media aritmetică a numerelor 23,8 și 24. Aceasta este 23,9 și comparăm 23,9 cu $\sqrt{569}$.

Deoarece $23,9^2 = 571,21$ și $571,21 > 569$, rezultă că $\sqrt{571,21} > \sqrt{569}$, adică $23,9 > \sqrt{569}$.

Prin urmare, $23,8 < \sqrt{569} < 23,9$.

Rezultă: $\sqrt{569} \approx 23,8$ (aproximarea prin lipsă la zecimi) și $\sqrt{569} \approx 23,9$ (aproximarea prin adaos la zecimi).




**Observații:**

**1.** Din inegalitatea $23,8 < \sqrt{569} < 23,9$, adică din *aproximarea la zecimi*, rezultă *aproximarea la sutimi* și așa mai departe.

**2.** Calcularea rădăcinii pătrate se face cu ajutorul calculatorului de buzunar.

*Calculatorul de buzunar*, invenție a oamenilor de știință, permite calcularea rădăcinii pătrate a unui număr, utilizând tasta $\boxed{\sqrt{\ }}$. De exemplu, pentru a calcula *rădăcina pătrată* a lui 2, procedăm astfel:

- apăsăm tasta $\boxed{2}$ și pe displayul calculatorului apare numărul 2;
- apăsăm tasta $\boxed{\sqrt{\ }}$ și pe display apare rezultatul $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373095$ (cu o eroare care este mai mică decât 0,000000000000001).

Procedăm la fel pentru a calcula rădăcina pătrată a oricărui număr rațional reprezentat printr-o fracție zecimală finită.

**3.** În toate exercițiile care urmează, folosirea unui calculator de buzunar este permisă numai dacă în fața exercițiilor respective este plasată imaginea alăturată.

## Exercițiul 2

Fără a folosi calculatorul, aproximează:

**a)** prin lipsă la întregi numărul $\sqrt{317}$; **b)** prin adaos la întregi numărul $\sqrt{317}$.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Deoarece $100 < 317 < 400$, rezultă că $\sqrt{100} < \sqrt{317} < \sqrt{400}$, adică $10 < \sqrt{317} < 20$.

- Media aritmetică a numerelor 10 și 20 este 15. Dar $15^2 = 225$ și $225 < 317 < 400$.

Rezultă că $15^2 < 317 < 20^2$, de unde $\sqrt{15^2} < \sqrt{317} < \sqrt{20^2}$, echivalent cu $15 < \sqrt{317} < 20$.

- Media aritmetică a numerelor 15 și 20 este 17,5, iar $17 < 17{,}5 < 18$. Comparăm numerele 17 și 18 cu $\sqrt{317}$.

Deoarece $17^2 = 289$, $18^2 = 324$ și $289 < 317 < 324$, rezultă că $17^2 < 317 < 18^2$, de unde $\sqrt{17^2} < \sqrt{317} < \sqrt{18^2}$, echivalent cu $17 < \sqrt{317} < 18$. Rezultă:

**a)** $\sqrt{317} \approx 17$ (aproximarea prin lipsă la întregi); **b)** $\sqrt{317} \approx 18$ (aproximarea prin adaos la întregi).

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

În rezolvarea exercițiilor, folosește calculatorul de buzunar. Excepțiile sunt specificate în enunț!

**1** Fără a folosi calculatorul:
**a)** arată că 7056 este pătrat perfect; **b)** extrage rădăcina pătrată din 7056.

**2** **a)** Fără a folosi calculatorul, încadrează numărul $\sqrt{17}$ între două numere întregi consecutive.
**b)** Determină aproximarea la zecimi prin lipsă a numărului $\sqrt{17}$.
**c)** Determină aproximarea la sutimi prin adaos a numărului $\sqrt{17}$.
**d)** Rotunjește la miimi numărul $\sqrt{17}$.

**3** **a)** Încadrează fiecare dintre numerele $\sqrt{235}$ și $\sqrt{1427}$ între aproximarea prin lipsă și aproximarea prin adaos la zecimi.
**b)** Aproximează numerele $\sqrt{235}$ și $\sqrt{1427}$ prin lipsă la sutimi.
**c)** Rotunjește numerele $\sqrt{235}$ și $\sqrt{1427}$ la sutimi.

**4** Calculează cu două zecimale exacte: **a)** $\sqrt{23}$; **b)** $\sqrt{107}$; **c)** $\sqrt{325}$; **d)** $\sqrt{571}$.

**5** Copiază și completează tabelul de mai jos:

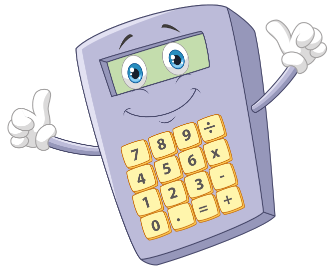
| Numărul | Aproximare la întregi prin lipsă | Aproximare la întregi prin adaos | Aproximare la zecimi prin lipsă | Aproximare la sutimi prin lipsă | Aproximare la sutimi prin adaos | Rotunjire la sutimi |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{7}$ | | | | | | |
| $\sqrt{17}$ | | | | | | |
| $\sqrt{37}$ | | | | | | |
| $\sqrt{47}$ | | | | | | |

**6** Calculează valoarea numărului $\sqrt{a+b}$, știind că $a=\sqrt{13^2-5^2}$ și $b=\sqrt{576}$.

**7** Fără a folosi calculatorul, încadrează numărul $\sqrt{137}$ între două numere întregi consecutive.

**8** Scrie trei numere raționale cuprinse între:

**a)** $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$; **b)** $\sqrt{6}$ și $\sqrt{7}$.



**9** Scrie numerele naturale *x* care verifică:

**a)** $3<\sqrt{x}<4$; **b)** $\sqrt{2}<x<\sqrt{17}$.

**10** Aproximează la miimi prin lipsă și apoi prin adaos numerele:

**a)** $\sqrt{257}$; **b)** $\sqrt{7453}$; **c)** $\sqrt{12354}$.

**11** Rotunjește la miimi numerele:

**a)** $\sqrt{19}$; **b)** $\sqrt{137}$; **c)** $\sqrt{9346}$.

**12** Estimează în metri diagonala suprafeței unui teren în formă de pătrat cu aria de:
**a)** 63 ha; **b)** 8 $dm^2$; **c)** 225 $dam^2$.

**13** Fie numerele $a=\sqrt{125}$ și $b=\sqrt{537}$.
**a)** Aproximează prin lipsă și apoi prin adaos la sutimi fiecare număr.
**b)** Rotunjește la sutimi numerele.

**14** Se consideră numerele $a=\sqrt{731}$ și $b=\sqrt{1574}$.
**a)** Calculează numerele *a* și *b* cu două zecimale exacte.
**b)** Folosind rezultatele precedente, stabilește dacă egalitățile $a^2=731$ și $b^2=1574$ sunt adevărate. Explică eventualele contradicții.

**15** Știind că $664<\sqrt{441800}<665$, fără a folosi calculatorul, calculează $\sqrt{4418}$ cu o zecimală exactă.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Dacă $a=\sqrt{61^2-11^2}$ și $b=\sqrt{16}$, atunci $\sqrt{a+b}=8$. **A F**

**b)** Dacă $\sqrt{\overline{abc}}=89$, atunci $\overline{abc}=831$. **A F**

**c)** Aproximarea prin lipsă la unități a numărului $\sqrt{23}$ este 5. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Dacă *p* este rădăcina pătrată a numărului 21 și $\sqrt{21}=4{,}5825\ldots$, notând cu $p_1$, cu $p_2$ și cu *r* aproximarea prin lipsă, aproximarea prin adaos, respectiv rotunjirea lui *p* la sutimi, rezultă că:

| | |
|---|---|
| **a)** $p_1$ este egal cu … | **1)** 4,57; |
| **b)** $p_2$ este egal cu … | **2)** 3,58; |
| **c)** $r+1$ este egal cu … | **3)** 5,58; |
| **d)** $r-1$ este egal cu … | **4)** 4,58; |
| | **5)** 4,59. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Rădăcina pătrată a unui număr natural *x* este egală cu *p*. Dacă $4{,}79<p<4{,}80$, atunci $\sqrt{x}$ calculat ca fracție zecimală cu două zecimale exacte este egal cu $\boxed{\phantom{0000}}$.

# LECȚIA 3 Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

## Rezolvăm împreună

### Exercițiul 1

Arată că numerele raționale pozitive $p = \frac{9}{16}$ și $q = 0{,}25$ verifică egalitățile:

**a)** $\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} = \sqrt{p \cdot q}$; **b)** $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$.

*Rezolvare (activitate frontală):*

Observăm că $p = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ și $q = 0{,}5^2$. Rezultă:

$$\sqrt{p} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}, \quad \sqrt{q} = \sqrt{0{,}5^2} = 0{,}5,$$

$$p \cdot q = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 0{,}5^2 = \left(\frac{3}{4} \cdot 0{,}5\right)^2 = \left(\frac{1{,}5}{4}\right)^2 \text{ și } \frac{p}{q} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 : 0{,}5^2 = \left(\frac{3}{4} : 0{,}5\right)^2 = \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{0{,}5}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

**a)** Deoarece $\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} = \frac{3}{4} \cdot 0{,}5 = \frac{1{,}5}{4}$ și $\sqrt{p \cdot q} = \sqrt{\left(\frac{1{,}5}{4}\right)^2} = \frac{1{,}5}{4}$, rezultă că $\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} = \sqrt{p \cdot q}$.

**b)** Deoarece $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} = \frac{3}{4} : 0{,}5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{0{,}5} = \frac{3}{2}$ și $\sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$, rezultă că $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$.

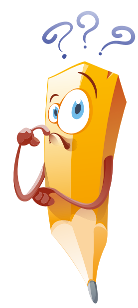
### Ne amintim

◆ Dacă $x$ este un număr rațional pozitiv, atunci $\sqrt{x^2} = x$.

*Exemple:* $\sqrt{7^2} = 7$; $\sqrt{0{,}34^2} = 0{,}34$;

$\sqrt{\left(\frac{11}{9}\right)^2} = \frac{11}{9}$; $\sqrt{\left(\frac{7{,}2}{4}\right)^2} = \frac{7{,}2}{4}$;

$\sqrt{\left(\frac{10{,}8}{1{,}8}\right)^2} = \frac{10{,}8}{1{,}8} = 6$.



### Exercițiul 2

Fie $a$ și $b$ două numere raționale pozitive.

**a)** Demonstrează că $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

**b)** Demonstrează că $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

**c)** Scrie $\sqrt{48}$ sub forma $a\sqrt{b}$, unde $a$ și $b$ sunt numere naturale și $b$ nu are ca divizor niciun pătrat perfect.

**d)** Scrie $2\sqrt{18}$ sub forma $\sqrt{a}$, cu $a$ număr natural.

*Rezolvare (activitate frontală):*

**a)** Notând $a\sqrt{b} = p$, rezultă că $\left(a\sqrt{b}\right)^2 = p^2$, adică $a^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = p^2$. Dar $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$. Prin urmare, $a^2 b = p^2$, adică pătratul lui $p$ este $a^2 b$. Altfel spus, rădăcina pătrată a numărului $a^2 b$ este $p$, adică $\sqrt{a^2 b} = p$ și, cum $a\sqrt{b} = p$, rezultă că $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

**b)** Notând $a\sqrt{b}$ cu $p$, obținem succesiv: $a\sqrt{b} = p$, $\left(a\sqrt{b}\right)^2 = p^2$, adică $a^2 b = p^2$ și $\sqrt{a^2 b} = p$. Deci, $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

**c)** Descompunem numărul 48 în factori primi și găsim $48 = 2^4 \cdot 3$, de unde $48 = (2^2)^2 \cdot 3 = 4^2 \cdot 3$, deci $48 = 4^2 \cdot 3$. Conform formulei $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, numită formula de scoatere a unui factor de sub radical, rezultă: $\sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$. Prin urmare, $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

**d)** Conform formulei $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, numită formula de introducere a unui factor sub radical, rezultă că $2\sqrt{18} = \sqrt{2^2 \cdot 18}$. Dar $2^2 \cdot 18 = 72$ și $2\sqrt{18} = \sqrt{72}$.

## Reține!

- **Radicalul unui produs** de numere raționale $p$ și $q$, $p \geq 0$ și $q \geq 0$, este egal cu produsul radicalilor:

$$\sqrt{p \cdot q} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q}, \text{ oricare ar fi } p, q \in \mathbb{Q}_+.$$

- **Radicalul câtului** a două numere raționale $p$ și $q$, $p \geq 0$ și $q > 0$, este egal cu câtul radicalilor celor două numere raționale:

$$\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}, \text{ oricare ar fi } p, q \in \mathbb{Q}_+.$$

- **Introducerea factorilor sub radical**

În egalitatea $p\sqrt{q} = \sqrt{p^2 \cdot q}$, unde $p, q$ sunt numere raționale pozitive, spunem că factorul $p$ al produsului $p\sqrt{q}$ a fost introdus sub radical. Dacă $p < 0$ și $q \geq 0$, atunci $p\sqrt{q} = -\sqrt{p^2 \cdot q}$.

- **Scoaterea factorilor de sub radical**

În egalitatea $\sqrt{p^2 \cdot q} = p\sqrt{q}$, unde $p, q$ sunt numere raționale pozitive, spunem că factorul $p$ al produsului $p^2 \cdot q$ a fost scos de sub radical. Dacă $p \in \mathbb{R}$ și $q \geq 0$, atunci $\sqrt{p^2 \cdot q} = |p|\sqrt{q}$.

▹ În cazul $\sqrt{A}$, unde $A$ este un număr natural, prin scoaterea factorilor de sub radical se înțelege scrierea radicalului sub forma $a\sqrt{b}$, unde $a$ și $b$ sunt numere naturale, iar $b$ nu este divizibil cu niciun pătrat perfect. Se introduc sub radical numai factorii pozitivi.

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Completează tabelul de mai jos, știind că $a$ și $b$ sunt numere naturale, iar $b$ nu este divizibil cu niciun pătrat perfect.

| $\sqrt{a^2b}$ | $\sqrt{48}$ | $\sqrt{45}$ | | $\sqrt{96}$ | | $\sqrt{252}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a\sqrt{b}$ | $4\sqrt{3}$ | | $7\sqrt{2}$ | | $5\sqrt{2}$ | | $5\sqrt{6}$ |

$$\begin{array}{r|l}
48 & 2 \\
24 & 2 \\
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}
\qquad 2\cdot 2 = 4,\quad 2 \cdot 2 = 4$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

***Rezolvare parțială:***

$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$; $7\sqrt{2} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{98}$. Analog, pentru celelalte numere.

### Exercițiul 2

Mihaela și Mihai au de rezolvat exercițiul de mai jos. Rezolvările lor sunt următoarele:

Scoate factorii de sub radical:
**a)** $\sqrt{32}$; **b)** $\sqrt{96}$.

Mihai descompune în factori primi numerele 32 și 96:

$$\begin{array}{r|l}
32 & 2 \\
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
96 & 2 \\
48 & 2 \\
24 & 2 \\
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}$$

Rezultă că $32 = 2^5$ și $96 = 2^5 \cdot 3$. Deci:

a) $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{(2^2)^2 \cdot 2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$;

b) $\sqrt{96} = \sqrt{2^5 \cdot 3} = \sqrt{(2^2)^2 \cdot 2 \cdot 3} = 2^2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$.

**Mihaela**

a) $\sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{2^2 \cdot 8} = 2\sqrt{8}$; b) $\sqrt{96} = \sqrt{4 \cdot 24} = \sqrt{2^2 \cdot 24} = 2\sqrt{24}$.

Care rezolvare este corectă?

***Rezolvare:***

Observăm că fiecare rezolvare respectă operațiile cu numere naturale, proprietățile operațiilor, inclusiv formula de scoatere a unui factor de sub radical. Dar trebuie să reținem că, în mod curent **în cazul $\sqrt{A}$, unde $A$ este un număr natural, prin scoaterea factorilor de sub radical se înțelege scrierea radicalului sub forma $a\sqrt{b}$, unde $a$ și $b$ sunt numere naturale, iar $b$ nu are ca divizor niciun pătrat perfect**. Remarcați că, din acest punct de vedere, rezultatele obținute de Mihaela nu sunt cele finale.

Rezultatele finale, corecte, sunt cele obținute de Mihai.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** a) Descompune în factori primi numerele: 28, 108, 343, 500, 243, 72.
b) Scoate factorii de sub radical: $\sqrt{28}, \sqrt{108}, \sqrt{343}, \sqrt{500}, \sqrt{243}, \sqrt{72}$.

**2** Introdu factorii sub radical: a) $2\sqrt{3}, 3\sqrt{5}, 5\sqrt{2}, 2\sqrt{7}, 4\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 7\sqrt{2}, 2\sqrt{5}, 3\sqrt{7}$.

**3** Scrie trei exemple de numere care:
a) nu sunt divizibile cu niciun pătrat perfect; b) sunt divizibile cu cel puțin un pătrat perfect.

**4** Scrie următoarele numere sub forma $a\sqrt{b}$, unde $a$ și $b$ sunt numere naturale, iar $b$ nu este divizibil cu niciun pătrat perfect:
a) $\sqrt{9\cdot16\cdot2}, \sqrt{3\cdot25\cdot81}, \sqrt{144\cdot49\cdot5}, \sqrt{9\cdot25\cdot2}$; b) $\sqrt{363}, \sqrt{3675}, \sqrt{7168}, \sqrt{14175}$.

**5** Se consideră numerele: $\sqrt{\frac{294}{900}}, \sqrt{\frac{36}{392}}, \sqrt{\frac{108}{441}}, \sqrt{\frac{576}{1440}}, \sqrt{\frac{490}{343}}, \sqrt{\frac{1008}{720}}$. Scrie fiecare fracție de sub radical sub formă ireductibilă, apoi scrie radicalul rezultat în una dintre formele $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $\frac{d}{e\sqrt{f}}$ sau $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, unde $a, b, c, d, e, f, p, q \in \mathbb{N}$ și $b, f, p$ și $q$ nu sunt divizibile cu niciun pătrat perfect.

**6** Calculează cel mai mic număr întreg mai mare decât: a) $2\sqrt{15}$; b) $3\sqrt{7}$; c) $5\sqrt{11}$; d) $7\sqrt{17}$.

**7** a) Fie $a > 0$ și produsul $(-1)\cdot\sqrt{a}$. Poate fi introdus factorul $(-1)$ sub radical?
b) Sunt corecte egalitățile $(-3)\cdot\sqrt{4} = -3\sqrt{4} = -\sqrt{36}$? Justifică.

**8** Calculează cel mai mare număr întreg mai mic decât: a) $-2\sqrt{15}$; b) $-3\sqrt{17}$; c) $5\sqrt{3}$; d) $7\sqrt{17}$.

**9** Introdu factorii sub radical și rotunjește la sutimi radicalul rezultat:
a) $4\sqrt{7}$; b) $7\sqrt{10}$; c) $15\sqrt{3}$; d) $2\sqrt{15}$.

**10** Scrie radicalul sub forma $a\sqrt{b}$, unde $a$ și $b$ sunt numere naturale, iar $b$ nu are ca divizor niciun pătrat perfect:
a) $\sqrt{9^n + 9^{n+1} + 9^{n+2}}$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\sqrt{12^n \cdot 15^{n+1} \cdot 20^{n+3}}$, $n \in \mathbb{N}$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1 Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

a) Numărul $\sqrt{450}$ este număr rațional. A F

b) Numărul $-\sqrt{\frac{5}{125}}$ este număr irațional. A F

c) Cel mai mic număr întreg mai mare decât $-2\sqrt{7}$ este numărul $-5$. A F

**2 Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

| | |
|---|---|
| a) $\sqrt{1260} = \ldots$ | 1) $15\sqrt{14}$; |
| b) $\sqrt{4116} = \ldots$ | 2) $14\sqrt{15}$; |
| c) $\sqrt{4410} = \ldots$ | 3) $21\sqrt{10}$; |
| d) $\sqrt{3150} = \ldots$ | 4) $14\sqrt{21}$; |
| | 5) $6\sqrt{35}$. |

**3 Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Dacă $n$ este un număr natural mai mare sau egal cu 2024 și $\sqrt{4^n + 2^{2n+1} + 4^{n+1}}$ se scrie sub forma $a\sqrt{b}$, astfel încât $b$ să nu aibă ca divizor niciun pătrat perfect, atunci numărul natural $b$ este egal cu $\boxed{\phantom{00}}$.

# EVALUAREA UNITĂȚII DE ÎNVĂȚARE

## TEST

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.**

(5p) **1.** Rădăcina pătrată a numărului 784 este numărul ... .

(5p) **2.** Dacă $\sqrt{7xy}$ este număr natural și $y > 4$, atunci $x$ este egal cu ... .

(5p) **3.** Aproximarea prin lipsă la întregi a numărului $\sqrt{250}$ este numărul ... .

(5p) **4.** Aproximarea prin adaos la întregi a numărului $\sqrt{250}$ este numărul ... .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare radical aflat în coloana A cu scrierea acestuia sub forma $a\sqrt{b}$, aflată în coloana B, unde $a \in \mathbb{N}$ și $b \in \mathbb{N}$, iar $b$ nu este divizibil cu niciun pătrat perfect.**

| A | B |
|---|---|
| (5p) **1.** $\sqrt{486} = \ldots$ | **a)** $1{,}5\sqrt{6}$; |
| (5p) **2.** $\sqrt{2{,}52} = \ldots$ | **b)** $6\sqrt{7}$; |
| (5p) **3.** $\sqrt{13{,}5} = \ldots$ | **c)** $0{,}6\sqrt{7}$; |
| (5p) **4.** $\sqrt{252} = \ldots$ | **d)** $9\sqrt{6}$; |
| | **e)** $0{,}5\sqrt{54}$. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) **1.** Dacă $\sqrt{675} = a\sqrt{3}$, atunci $a$ este egal cu:
**A.** 25; **B.** 15; **C.** 75; **D.** 45.

(5p) **2.** Dacă $21\sqrt{7} = \sqrt{a}$, atunci $a$ este egal cu:
**A.** 1029; **B.** 441; **C.** 147; **D.** 3087.

(5p) **3.** Dacă $\sqrt{1620} = 18\sqrt{a}$, atunci $a$ este egal cu:
**A.** 15; **B.** 10; **C.** 5; **D.** 20.

(5p) **4.** Numărul $\sqrt{79}$ este număr:
**A.** rațional; **B.** natural; **C.** irațional; **D.** întreg.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

**IV.** Fie mulțimea $M = \left\{1{,}(3),\ -7,\ -\frac{1}{4},\ \sqrt{\frac{18}{2}},\ -\sqrt{12},\ 5\sqrt{3}\right\}$.

(15p) Determină mulțimile:
**a)** $M \cap \mathbb{Z}$; **b)** $M \cap \mathbb{Q}$; **c)** $M \setminus \mathbb{Q}$.

**V.** Se consideră mulțimea $M = \left\{\sqrt{\frac{4}{9}},\ -2,\ 3,\ \sqrt{25},\ -\sqrt{\frac{98}{2}},\ \sqrt{27},\ -\sqrt{8}\right\}$.

(15p) Calculează suma numerelor din mulțimea $M$ care sunt:
**a)** naturale; **b)** întregi; **c)** raționale.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Nota** | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# UNITATEA: NUMERE REALE

## LECȚIA 1 Numere iraționale. Numere reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

### Ne amintim

- orice număr natural este număr întreg, adică $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$;
- orice număr întreg este număr rațional, adică $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;
- orice număr rațional poate fi scris sub una dintre formele $-\dfrac{m}{n}$ sau $\dfrac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{N}$ și $n \in \mathbb{N}^*$;
- prin algoritmul de împărțire, orice fracție ordinară poate fi scrisă ca o fracție zecimală finită sau ca o fracție zecimală infinită periodică;
- mulțimea numerelor raționale este mulțimea ale cărei elemente sunt fracțiile zecimale finite sau fracțiile zecimale infinite periodice.

### Rezolvăm împreună

**PROBLEMA 1**

Se consideră fracția zecimală infinită 0,1010010001…, definită astfel: *după primul 1 urmează un zero, după al doilea 1 urmează două zerouri, după al treilea 1 urmează trei zerouri etc.*

Arată că această fracție zecimală nu este periodică.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*
Presupunem, prin reducere la absurd, că fracția zecimală este o fracție zecimală periodică. Presupunând că perioada are $n$ cifre, aceasta va conține cel puțin o cifră 1 și cel mult $n - 1$ zerouri. Rezultă că între oricare două cifre de 1 consecutive nu putem avea mai mult de $n - 1$ zerouri. Fals, deoarece acest lucru este în contradicție cu modul de formare a fracției zecimale. Prin urmare, fracția zecimală considerată este o fracție zecimală infinită neperiodică.

### Observăm și descoperim cunoștințe noi

Problema precedentă arată că există fracții zecimale infinite care nu sunt periodice. Prin urmare, există: *fracții zecimale finite* (de exemplu, 14,035), *fracții zecimale infinite periodice* (de exemplu, 3,(02) sau –18,01(3)) și *fracții zecimale infinite neperiodice* (de exemplu, fracția zecimală din problema precedentă). Această observație ne permite să identificăm noi mulțimi: **mulțimea numerelor reale** și **mulțimea numerelor iraționale**.

**Reține!**

- **Mulțimea numerelor reale** este mulțimea ale cărei elemente sunt *fracțiile zecimale finite, fracțiile zecimale infinite periodice și fracțiile zecimale infinite neperiodice.*
- Mulțimea numerelor reale se notează cu $\mathbb{R}$.
- **Mulțimea numerelor raționale** este mulțimea ale cărei elemente sunt *fracțiile zecimale finite și fracțiile zecimale infinite periodice.*
- Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$.
- Orice număr rațional este număr real, adică $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- **Mulțimea numerelor iraționale** este mulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ale cărei elemente sunt fracții *zecimale infinite neperiodice.*
- Un număr este real dacă și numai dacă este rațional sau irațional: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

## Rezolvăm împreună

### Problema 2


**a)** Demonstrează că rădăcina pătrată a numărului 2 nu este număr rațional.

**b)** Arată că rădăcina pătrată a numărului 2 nu poate fi reprezentată printr-o fracție zecimală finită sau periodică.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Presupunem, prin reducere la absurd, că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Atunci există $x \in \mathbb{Q}$ și $x > 0$, astfel încât $\sqrt{2} = x$. Rezultă că $x^2 = 2$. Deoarece $x \in \mathbb{Q}$ și $x > 0$, rezultă că $x = \frac{m}{n}$, unde $m$ și $n$ sunt numere naturale și $n \neq 0$. Putem presupune că această fracție ordinară este ireductibilă, căci, în caz contrar, o simplificăm și devine ireductibilă. Cum $x^2 = 2$, rezultă că $\frac{m^2}{n^2} = 2$, de unde $m^2 = 2n^2$. Deci, $m^2$ este număr natural par. Dacă $m^2$ este număr natural par, atunci și $m$ este număr natural par, adică $m = 2k$, unde $k$ este un număr natural nenul. Înlocuindu-l pe $m$ cu $2k$ în egalitatea $m^2 = 2n^2$, rezultă că $4k^2 = 2n^2$ sau $2k^2 = n^2$. Deci, $n^2$ este număr natural par. Atunci și $n$ este număr natural par. Cum $m$ și $n$ sunt amândouă pare, rezultă că fracția poate fi simplificată cu 2, adică este reductibilă. Acest lucru este imposibil, deoarece fracția $\frac{m}{n}$ este ireductibilă. Presupunerea că rădăcina pătrată a lui 2 este număr rațional este falsă și, ca urmare, rădăcina pătrată a numărului 2 nu este număr rațional, adică $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

**Observație:** Analog, se demonstrează că pentru orice $p$, număr prim, $\sqrt{p}$ nu este număr rațional.

**b)** Presupunem, prin reducere la absurd, că $\sqrt{2}$ poate fi reprezentat printr-o fracție zecimală finită sau periodică. Cum orice fracție zecimală finită sau periodică poate fi reprezentată printr-o fracție ordinară $\frac{m}{n}$, rezultă că $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, ceea ce înseamnă că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Acest rezultat este *absurd*, deoarece este în contradicție cu demonstrația anterioară. Prin urmare, $\sqrt{2}$ nu poate fi reprezentat printr-o fracție zecimală finită sau periodică.

## Reține!

| | |
|---|---|
| • **Numărul rațional** este o fracție ordinară care poate fi reprezentată printr-o fracție zecimală finită sau periodică, precedată sau nu de semnul „+" sau de semnul „–". | • $\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}$; 0,25; 1,(12); 7,8(12); –2,87 $\in \mathbb{Q}$. |
| • Numărul real care nu este număr rațional se numește **număr irațional**. | • $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ și $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$ este număr irațional). |
| • **Numărul irațional** este o fracție zecimală infinită neperiodică. | • 0,101001000100001000001… este număr irațional. |
| • **Dacă $p$ este un număr natural prim, atunci $\sqrt{p}$ este număr irațional.** | • $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \ldots$ sunt numere iraționale. |
| • **Dacă $n \in \mathbb{N}$ nu este pătrat perfect, atunci $\sqrt{n}$ este număr irațional.** | • $72 = 2^3 \cdot 3^2$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow \sqrt{72}$ este număr irațional. |
| • **Opusul unui număr irațional este un număr irațional.** | • $+\sqrt{15}, -\sqrt{15}$ sunt numere iraționale. |
| • **Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.** | • $3+\sqrt{7}, \frac{2}{3}+\sqrt{15}, 7-\sqrt{5}$ sunt numere iraționale. |
| • **Produsul dintre un număr rațional nenul și un număr irațional este un număr irațional.** | • $8\sqrt{14}, \frac{2}{3}\sqrt{15}, -17\sqrt{5}$ sunt numere iraționale. |

## Aplicăm cunoștințele

Arată că $\sqrt{\frac{18}{7}}$ este număr irațional.

***Rezolvare** (activitate frontală):* Presupunem, prin reducere la absurd, că $\sqrt{\frac{18}{7}} \in \mathbb{Q}$. Rezultă că $\sqrt{\frac{18}{7}} = \frac{m}{n}$, unde $m$ și $n$ sunt numere naturale nenule, prime între ele. Deoarece $\sqrt{\frac{18}{7}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{7}}$, rezultă succesiv că: $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{7}} = \frac{m}{n}$; $n\sqrt{18} = m\sqrt{7}$; $\left(n\sqrt{18}\right)^2 = \left(m\sqrt{7}\right)^2$; $18n^2 = 7m^2$. Deoarece $18n^2 \vdots 2$, din ultima egalitate rezultă că $7m^2 \vdots 2$. Rezultă că $m \vdots 2$, adică $m = 2k$, unde $k \in \mathbb{N}$, iar din egalitatea $18n^2 = 7m^2$ rezultă că $18n^2 = 7 \cdot 4k^2$, echivalent cu $9n^2 = 7 \cdot 2k^2$. Deoarece $7 \cdot 2k^2 \vdots 2$, rezultă că $9n^2 \vdots 2$, de unde $n \vdots 2$. Cum $m \vdots 2$ și $n \vdots 2$, rezultă că $m$ și $n$ nu sunt prime între ele, ceea ce este absurd, deoarece este în contradicție cu presupunerea făcută ($m$ și $n$ sunt numere naturale prime între ele). Prin urmare, $\sqrt{\frac{18}{7}} \notin \mathbb{Q}$ și $\sqrt{\frac{18}{7}}$ este număr irațional.

**Observație:** În general, dacă un număr rațional $x$ nu se poate scrie ca raport de pătrate perfecte, atunci $\sqrt{x}$ este număr irațional.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** **a)** Scrie două numere raționale și două numere iraționale.
**b)** Scrie două numere reale care nu sunt raționale.

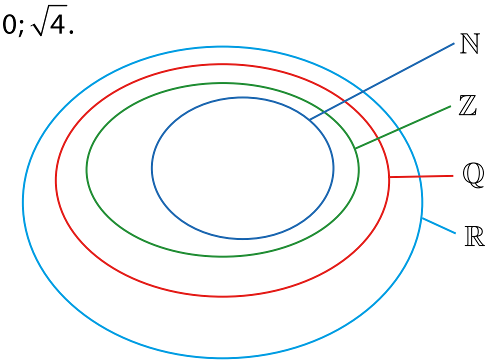
**2** Scrie două exemple de numere reale care nu sunt raționale și care sunt:
**a)** pozitive; **b)** negative; **c)** unul pozitiv și altul negativ.

**3** Se consideră mulțimea $M = \left\{x \mid x = \sqrt{a}, a \in \mathbb{N}, a < 10\right\}$. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr $a$ din mulțimea $M$, acest număr să fie: **a)** rațional; **b)** irațional.

**4** Se consideră mulțimea $M = \left\{2; -\sqrt{5}; 0{,}3; \sqrt{1}; -\sqrt{9}; \sqrt{7}; -0{,}2(3)\right\}$. Scrie elementele mulțimii $M \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

**5** Se consideră numerele: $-2; -\sqrt{3}; \frac{2}{3}; \sqrt{5}; -1{,}(3); -\sqrt{16}; 3{,}25; \sqrt{8}; 10; \sqrt{4}$.

**a)** Copiază desenul alăturat și scrie fiecare dintre numerele date în diagrama corespunzătoare mulțimii căreia îi aparține.
**b)** Cum se numesc elementele mulțimilor: i) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; ii) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$?
**c)** Definește mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, numind o proprietate caracteristică elementelor sale.




**6** **a)** Scrie trei numere reale care nu sunt raționale.
**b)** Scrie trei numere raționale care nu sunt întregi.
**c)** Scrie trei numere întregi care nu sunt naturale.

**7** Fie mulțimea $A = \left\{0{,}2; 3; 0{,}5; 2019^0; \sqrt{5}; -\sqrt{7}\right\}$. Scrie elementele mulțimilor:
**a)** $A \setminus \mathbb{Z}$; **b)** $A \cap \mathbb{Q}$; **c)** $A \setminus \mathbb{Q}$.

**8** Precizează valoarea de adevăr a propozițiilor:
**a)** $\{-1; 0; 2\} \subset \mathbb{Z}$; **b)** $\left\{-\sqrt{3}; \sqrt{5}; -\sqrt{2}\right\} \subset \mathbb{Z}$; **c)** $\left\{-\sqrt{3}; \sqrt{5}; -\sqrt{2}\right\} \subset \mathbb{R}$;
**d)** $\{-1; 3\} \subset \mathbb{N}$; **e)** $\{-4\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; **f)** $\left\{-\sqrt{9}; \sqrt{2}\right\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**9** Demonstrează că: **a)** $\sqrt{3}$ este număr irațional; **b)** $\sqrt{5}$ este număr irațional.

**10** Demonstrează că:
**a)** suma dintre un număr rațional și unul irațional este un număr irațional;
**b)** produsul dintre un număr rațional și unul irațional este un număr irațional.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Există numere naturale nenule $a$ și $b$ pentru care rezultatul calculului $a\sqrt{b}$ este număr natural. **A** **F**

**b)** Există numere naturale nenule $a$ și $b$, unde $b$ nu este divizibil cu niciun pătrat perfect, pentru care rezultatul calculului $a\sqrt{b}$ este rațional. **A** **F**

**c)** Rezultatul calculului $5+\sqrt{15}$ este un număr irațional. **A** **F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

**a)** $\sqrt{\dfrac{2,5}{0,9}}$ aparține mulțimii …

**b)** $\sqrt{5^2+12^2}-\sqrt{25^2-20^2}$ aparține mulțimii …

**c)** $\sqrt{\dfrac{4\cdot 10^2}{5^2}}$ aparține mulțimii …

**d)** $\sqrt{1\dfrac{4}{16}}$ aparține mulțimii …

**1)** $\mathbb{N}\setminus\mathbb{Z}$;

**2)** $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$;

**3)** $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$;

**4)** $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

**5)** $\mathbb{R}\cap\mathbb{N}$.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Cel mai mare număr natural $x$ pentru care $\sqrt{24-x}\in\mathbb{Q}$ este numărul $\boxed{\phantom{00}}$.

# LECȚIA 2 Modulul unui număr real

## Ne amintim

- modulul unui număr rațional și proprietățile modulului;
- reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor.

## Rezolvăm împreună

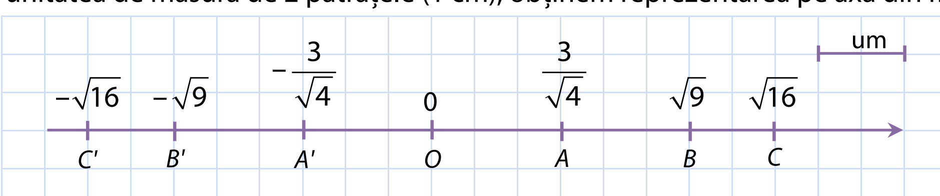
**a)** Reprezintă pe o axă punctele $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ și $C'$, ale căror coordonate sunt numerele:

$$\frac{3}{\sqrt{4}},\ \sqrt{9},\ \sqrt{16},\ \frac{-3}{\sqrt{4}},\ -\sqrt{9}\ \text{ și }\ -\sqrt{16}.$$

**b)** Folosind reprezentarea grafică, arată că modulul unui număr real este egal cu distanța de la originea axei la reprezentarea numărului pe axă.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Considerând unitatea de măsură de 2 pătrățele (1 cm), obținem reprezentarea pe axă din figura de mai jos.




**b)** Având în vedere definiția și proprietățile modulului învățate la mulțimea numerelor raționale, definiția radicalului și reprezentarea pe axă, obținem: $\left|\dfrac{3}{\sqrt{4}}\right|=\left|\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{3}{2}=1,5$ și $OA = 1,5$ cm, respectiv $\left|\dfrac{-3}{\sqrt{4}}\right|=\left|-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{3}{2}=1,5$ și $OA' = 1,5$ cm, adică $OA = OA'$. În mod asemănător, obținem că $OB = OB'$ și $OC = OC'$, adică modulul numărului reprezintă distanța de la originea axei la reprezentarea acelui număr pe axa numerelor.

În general, dacă $x$ este un număr real și punctul $M$ este *reprezentarea pe axă* a numărului $x$, atunci *modulul* numărului $x$ este *distanța*, *pe axa numerelor*, de la originea axei la punctul $M$. Scriem $|x| = |OM|$, unde $O$ este originea axei, iar punctul $M$ este reprezentarea pe axă a numărului $x$.

**Observații:**

**1.** Modulul unui număr negativ este egal cu opusul numărului respectiv.

*Exemplu:* $\left|-\sqrt{11}\right| = -\left(-\sqrt{11}\right)$, deoarece $\left|-\sqrt{11}\right| = \sqrt{11}$ și $-\left(-\sqrt{11}\right) = \sqrt{11}$.

**2.** Dacă modulul unui număr este $\sqrt{a}$, atunci există două numere reale distincte cu proprietatea că modulul lor este $\sqrt{a}$. Aceste numere sunt $\sqrt{a}$ și $-\sqrt{a}$.

*Exemplu:* $|x| = \sqrt{11}$; există două numere cu această proprietate și anume $x = \sqrt{11}$ și $x = -\sqrt{11}$.

**3.** Modulul unui număr este cu atât mai mare, cu cât distanța de la origine la punctul de reprezentare a acelui număr pe axă este mai mare.

*Exemplu:* $\left|-\sqrt{16}\right| > \left|-\sqrt{9}\right|$.

## Reține!

◆ **Definiția modulului unui număr real**

- Dacă $x$ este un număr real, atunci:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

- Modulul unui număr real este egal cu distanța de la originea axei la reprezentarea numărului pe axa numerelor.

◆ **Proprietățile modulului unui număr real** (oricare ar fi numerele reale *a și b*)**:**

- $|a| \geq 0$;
- $|a| = 0$ dacă și numai dacă $a = 0$;
- $|a| = |-a|$;
- $|a|^2 = a^2$;
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- pentru $b \neq 0$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

◆ **Scoaterea unui factor de sub radical:**

$\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;

$\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$.

◆ **Introducerea unui factor sub radical:**

$$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, & \text{dacă } a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 b}, & \text{dacă } a, b \in \mathbb{R}, a < 0, b \geq 0 \end{cases}.$$

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Fie $a$ și $b$ două numere reale.

**a)** Dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci $|a \cdot b| = ab$ și $|a| \cdot |b| = ab$. Justifică.

**b)** Dacă $a < 0$ și $b > 0$, atunci $|a \cdot b| = -ab$ și $|a| \cdot |b| = -ab$. Justifică.

**c)** Dacă $a > 0$ și $b < 0$, atunci $|a \cdot b| = -ab$ și $|a| \cdot |b| = -ab$. Justifică.

**d)** Dacă $a < 0$ și $b < 0$, atunci $|a \cdot b| = ab$ și $|a| \cdot |b| = ab$. Justifică.

**e)** Dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci $|a \cdot b| = 0$ și $|a| \cdot |b| = 0$. Justifică.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**c)** Dacă $a > 0$ și $b < 0$, atunci $a \cdot b < 0$ și $|a \cdot b| = -ab$. De asemenea, $a > 0$ implică $|a| = a$ și $b < 0$ implică $|b| = -b$. Prin urmare, $|a \cdot b| = -ab$ și $|a| \cdot |b| = -ab$.

Din rezolvarea exercițiului 1 rezultă că $\boldsymbol{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|}$, oricare ar fi $a$ și $b$ numere reale.

### Exercițiul 2

Demonstrează că $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, oricare ar fi $a$ și $b$ numere reale, $b \neq 0$.

**Rezolvarea** – activitate pe grupe

### Exercițiul 3

Demonstrează că:

**a)** $\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;

**b)** $\sqrt{a^2 b} = |a| \cdot \sqrt{b}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$.

**Rezolvarea** – activitate pe grupe

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Copiază și completează tabelul:

<table>
<tr><td>$x$</td><td></td><td></td><td>$-\sqrt{2}$</td><td></td><td></td><td></td><td>$-2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$\sqrt{5}$</td><td></td><td></td><td>$-\frac{1}{2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$|x|$</td><td colspan="2">1,5</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">$\sqrt{10}$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">1,7</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">$\frac{2}{3}$</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

**2** Determină numerele reale $x$, știind că: **a)** $|x| = 2\sqrt{3}$; **b)** $|x| = 0$; **c)** $|-x| = \frac{2}{3}$; **d)** $|-x| = x$.

**3** Scrie valoarea absolută a numărului: **a)** $-12$; **b)** $-\frac{2}{3}$; **c)** $3{,}25$; **d)** $-0{,}5$; **e)** $\sqrt{6}$; **f)** $-3\sqrt{5}$.

**4** Fie numărul real $a = -1{,}214$. Scrie aproximările prin adaos la zecimi ale numerelor: $|a|$; $1-\sqrt{a^2}$; $\left|-\sqrt{a^2}-1\right|$.

**5** Un elev din clasa a VII-a, dorind să exerseze *introducerea unui factor sub radical* și *definiția modulului unui număr real*, a scris în caietul de matematică:

**a)** $\left|2\sqrt{3}-4\right| = 2\sqrt{3}-4$; **b)** $\left|7-5\sqrt{2}\right| = -7+5\sqrt{2}$; **c)** $\left|3\sqrt{11}-10\right| = 10-3\sqrt{11}$.

Precizează care egalități sunt adevărate și care sunt false.

**6** Știind că $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$, $\sqrt{7} = 2{,}64575\ldots$, elimină modulul din scrierea numerelor:

**a)** $\left|1{,}414-\sqrt{2}\right|$; **b)** $\left|-\sqrt{3}+1{,}73\right|$; **c)** $\left|5{,}25-2\sqrt{7}\right|$.

**7** Pentru $x < -5$, calculează: **a)** $|1 - x| - 2 + x$; **b)** $|-2 - x| + 5 + x$.

**8** Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

**a)** $x = 0$ și $y = 0$ dacă și numai dacă …
**b)** $x$ și $y$ sunt nule sau de semne contrare dacă și numai dacă …
**c)** $-2 \le x \le 2$ dacă și numai dacă …
**d)** $-5 \le x \le 3$ dacă și numai dacă …

**1)** $|x - y| = |x| + |y|$;
**2)** $|x + 2| \le 5$;
**3)** $|x + 1| \le 4$;
**4)** $|x| \le 2$;
**5)** $|x| + |y| = 0$.

**9** Introdu sub radical factorul $\frac{x}{y}$ din expresia $\frac{x}{y}\cdot\sqrt{-\frac{x}{y}}$, știind că $x \ne 0$, $y \ne 0$ și că $|x - y| = |x| + |y|$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** $|x + y| = |x| + |y|$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. A F
**b)** Dacă $|x| = -x$, rezultă că numărul real $-x$ este negativ. A F
**c)** Dacă $x$ este un număr real, rezultă că $|x| = x$ sau $x < 0$. A F

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

**a)** Dacă $x \in \mathbb{R}$ și $y \ge 0$, atunci $\sqrt{8x^2y} = \ldots$
**b)** Dacă $x \ge 0$ și $y \ge 0$, atunci $\sqrt{8x^2y} = \ldots$
**c)** Dacă $x < 0$ și $y \ge 0$, atunci $\sqrt{8x^2y} = \ldots$
**d)** Dacă $x < 0$ și $y < 0$, atunci $\sqrt{-8x^2y} = \ldots$

**1)** $2|x|\sqrt{2y}$;
**2)** $-2x\sqrt{2y}$;
**3)** $2x\sqrt{2y}$;
**4)** $2x\sqrt{-2y}$;
**5)** $-2x\sqrt{-2y}$.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Rezultatul calculului $\left|-2\sqrt{2}-x\right|+3\sqrt{8}+x$ este rădăcina pătrată a unui număr natural. Pentru $x < -3$, numărul natural este egal cu $\boxed{\phantom{00}}$.

# LECȚIA 3 Compararea și ordonarea numerelor reale

## Ne amintim

- compararea numerelor raționale reprezentate prin fracții zecimale.

## Rezolvăm împreună

Folosind un calculator de buzunar, calculează rădăcina pătrată și compară numerele reale:

**a)** $\frac{3}{4}$ și $\frac{6}{25}$; **b)** $\sqrt{7}$ și 2,645; **c)** $\frac{11}{5}$ și $\sqrt{5}$; **d)** $-\sqrt{5}$ și $\sqrt{2}$; **e)** $-\sqrt{7}$ și $-\frac{13}{5}$; **f)** $-\frac{21}{5}$ și $-\sqrt{17}$; **g)** $5\sqrt{6}$ și $6\sqrt{5}$.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Aducem fracțiile la același numitor. Numitorul comun este 100. Atunci $^{25)}\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$ și $^{4)}\frac{6}{25}=\frac{24}{100}$.

$\frac{24}{100}<\frac{75}{100}$ ⟷ Dacă $m$, $n$ și $p$ sunt numere naturale nenule, atunci $\frac{m}{n}<\frac{p}{n}$ dacă și numai dacă $m<p$.

Rezultă că $\frac{6}{25}<\frac{3}{4}$.

**b)** $\sqrt{7}=2{,}64575131\ldots$. Comparând $\sqrt{7}=\underline{2{,}6457}5131\ldots$ cu $\underline{2{,}6450}$, rezultă că $\sqrt{7}>2{,}645$.

**c)** $\frac{11}{5}=2{,}20$ și $\sqrt{5}=2{,}23606797749979\ldots$.

$\underline{2{,}23}6067\ldots>\underline{2{,}20}$ ⟷ Dacă numerele pozitive sunt scrise sub formă de fracție zecimală, atunci se compară părțile întregi și părțile zecimale cifră cu cifră.

Rezultă că $\sqrt{5}>\frac{11}{5}$, deoarece $\underline{2{,}23}6067\ldots>\underline{2{,}20}$.

**d)** $-\sqrt{5}<\sqrt{2}$ ⟷ Orice număr negativ este mai mic decât orice număr pozitiv.

**e)** Scriem numerele sub formă zecimală și comparăm modulele lor:

Dintre două numere negative, mai mic este acela care are modulul mai mare.

Din $-\sqrt{7}=-2{,}64\ldots$ și $-\frac{13}{5}=-2{,}6$ rezultă că $\left|-\sqrt{7}\right|=|-2{,}64\ldots|=2{,}64\ldots$ și $\left|-\frac{13}{5}\right|=|-2{,}64|=2{,}60$.

Cum $2{,}64>2{,}60$, rezultă că $-\sqrt{7}<-\frac{13}{5}$.

**f)** Din $-\frac{21}{5}=-4{,}2$ și $-\sqrt{17}=-4{,}1\ldots$ rezultă că $\left|-\frac{21}{5}\right|=|-4{,}2|=4{,}2$ și $\left|-\sqrt{17}\right|=|-4{,}1\ldots|=4{,}1\ldots$.

Cum $4{,}2>4{,}1$, rezultă că $-\frac{21}{5}<-\sqrt{17}$.

**g)** Introducem factorii sub radical: $5\sqrt{6}=\sqrt{5^2\cdot 6}=\sqrt{150}$ și $6\sqrt{5}=\sqrt{6^2\cdot 5}=\sqrt{180}$. Rezultă:

$\sqrt{150}<\sqrt{180}$, deoarece $150<180$ ⟷ Oricare ar fi $a\geq 0$ și $b\geq 0$, $\sqrt{a}\geq\sqrt{b}$ dacă și numai dacă $a\geq b$.
$$\sqrt{a}\geq\sqrt{b}\Leftrightarrow a\geq b$$

**Observație:** Deoarece orice număr real poate fi reprezentat printr-o fracție zecimală, pentru a compara două numere reale, folosim regulile de comparare ilustrate anterior.

## Reține!

- A compara două numere reale $a$ și $b$ înseamnă a stabili care dintre relațiile $a < b$ sau $a = b$ sau $a > b$ are loc. Pentru orice numere reale $a$ și $b$ are loc una și numai una dintre relațiile $a < b$ sau $a = b$ sau $a > b$.
- Orice număr real negativ este mai mic decât 0 și decât orice număr real pozitiv.
- Dacă $a$ și $b$ sunt numere reale negative, $a < 0$, $b < 0$, avem $a < b$ dacă și numai dacă $|a| > |b|$.
- Dacă $a$ și $b$ sunt numere reale pozitive, $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $a \leq b$ dacă și numai dacă $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.
- Pe mulțimea numerelor reale, relația „≤" are proprietățile:
  - $a \leq a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;
  - dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$;
  - dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$;
  - dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ dacă și numai dacă $a \geq b$.
- Proprietățile relației „≤" rămân valabile și pentru relația „≥".
- Relațiile „<" și „>" au proprietățile:
  - dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$;
  - dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$.

## Aplicăm cunoștințele

Fără a folosi calculatorul, compară numerele reale:

**a)** $-\dfrac{17}{2}$ și $-\sqrt{84}$; **b)** $-3\sqrt{8}$ și $-\sqrt{73}$.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Calculăm, apoi comparăm pătratele celor două numere: $\left(-\dfrac{17}{2}\right)^2 = 8{,}5^2 = 72{,}25$ și $\left(-\sqrt{84}\right)^2 = 84$. Deoarece $72{,}25 < 84$, rezultă succesiv că: $\sqrt{72{,}25} < \sqrt{84}$; $\sqrt{\left(-\dfrac{17}{2}\right)^2} < \sqrt{\left(-\sqrt{84}\right)^2}$; $\left|-\dfrac{17}{2}\right| < \left|-\sqrt{84}\right|$.

Deoarece, *dintre două numere negative, mai mic este acela care are modulul mai mare,* rezultă că $-\sqrt{84} < -\dfrac{17}{2}$.

**b)** Introducem factorul sub radical și comparăm modulele celor două numere: $-3\sqrt{8} = -\sqrt{72}$. Rezultă că $\left|-3\sqrt{8}\right| = \left|-\sqrt{72}\right| = \sqrt{72}$. Cum $\left|-\sqrt{73}\right| = \sqrt{73}$ și $72 < 73$, rezultă că $\sqrt{72} < \sqrt{73}$, deci $\left|-3\sqrt{8}\right| < \left|-\sqrt{73}\right|$.

Deoarece, *dintre două numere negative, mai mic este acela care are modulul mai mare*, rezultă că $-\sqrt{73} < -3\sqrt{8}$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Compară numerele reale:

**a)** $-\sqrt{3}$ și $\sqrt{2}$; **b)** $\dfrac{17}{5}$ și $\sqrt{11}$; **c)** $\sqrt{5}$ și $\dfrac{5}{2}$; **d)** $-\sqrt{19}$ și $-\dfrac{9}{2}$.

**2** Precizează care dintre următoarele propoziții sunt adevărate și care sunt false:

**a)** $\sqrt{2} > 1{,}5$; **b)** $\sqrt{10} < 3$; **c)** $-2 < -\sqrt{3}$; **d)** $-\sqrt{2} < -\sqrt{3}$.

**3** Încadrează fiecare număr real între două numere întregi consecutive:

**a)** $\ldots < 1{,}7 < \ldots$; **b)** $\ldots < -1{,}7 < \ldots$; **c)** $\ldots < \sqrt{7} < \ldots$; **d)** $\ldots < -\sqrt{7} < \ldots$ .

**4** Se consideră numărul real $x$, astfel încât $\dfrac{371}{10} < x^2 < \dfrac{372}{10}$. Scrie trei valori ale lui $x$:

**a)** pozitive; **b)** negative.

**5** Știind că $\sqrt{3}=1{,}73...$ și $\sqrt{5}=2{,}23...$, scrie trei numere reale cuprinse între:

**a)** $1{,}7$ și $\sqrt{3}$; **b)** $-\sqrt{5}$ și $-2{,}2$.

**6** Scrie elementele mulțimii: $M=\{x\in\mathbb{Z}\mid -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{7}\}\cap\{x\in\mathbb{Z}\mid |x+1|\le 2\}$.

**7** Se consideră mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Precizează pentru fiecare dintre numerele de mai jos dacă aparține sau nu mulțimilor enumerate:

**a)** $-0{,}1(3)$; **b)** $\sqrt{17}$; **c)** $\sqrt{81}$; **d)** $-\sqrt{144}$; **e)** $-\sqrt{3}$.

**8** Se consideră un pătrat *ABCD*, a cărui arie este egală cu 5 m². Știind că $\sqrt{5}=2{,}2360...$:
**a)** calculează lungimea laturii pătratului, cu aproximare prin adaos la miimi;
**b)** scrie lungimea calculată la punctul a), în decimetri;
**c)** scrie lungimea calculată la punctul a), în milimetri;
**d)** scrie lungimea calculată la punctul a), sub forma $x$ m + $y$ dm + $z$ cm + $t$ mm, unde $x$, $y$, $z$ și $t$ sunt numere naturale nenule.

**9** Scrie numerele întregi consecutive între care se află:

**a)** $\sqrt{13}$; **b)** $-\sqrt{13}$.

**10** Scrie numerele întregi situate între:

**a)** $-\sqrt{3}$ și $\sqrt{2}$; **b)** $-\sqrt{5}$ și $\sqrt{5}$.

**11** Determină numerele reale care verifică inegalitatea:

**a)** $\left|x-\sqrt{5}\right|\le 0$; **b)** $\left|2y-\sqrt{3}\right|\le 0$.

**12** Se știe că $\left|a-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{3}-b\right|\le 0$. Calculează numerele reale *a* și *b*.

**13** Calculează:
**a)** $|x|+|1-x|+2x-3$, dacă $x<0$;
**b)** $|x^2+1|-\sqrt{x^4}+|x-3|+x-3$, dacă $0<x<3$;
**c)** $|x+2|+\sqrt{(x-1)^2}-|3x-6|$, dacă $-2<x<1$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** $2\sqrt{5}<3\sqrt{2}$. A F

**b)** Dacă $\sqrt{x}=11{,}48912529...$ și $\sqrt{y}=11{,}48956...$, atunci $\sqrt{x}>\sqrt{y}$. A F

**c)** Numerele $-3{,}5$, $-3{,}51$, $-3{,}52$ și $-3{,}53$ sunt scrise în ordine crescătoare. A F

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Dintre numerele *x*, *y*, *z* și *t*, cel mai mare este:

| | |
|---|---|
| **a)** *x*, dacă … | **1)** $x=2\sqrt{3}$; $y=0{,}1\sqrt{1250}$; $z=\sqrt{10}$; $t=0{,}5\sqrt{42}$; |
| **b)** *y*, dacă … | **2)** $x=-2\sqrt{3}$; $y=-0{,}1\sqrt{1250}$; $z=-\sqrt{10}$; $t=-0{,}5\sqrt{42}$; |
| **c)** *z*, dacă … | **3)** $x=2\sqrt{3}$; $y=-0{,}1\sqrt{1250}$; $z=-\sqrt{10}$; $t=-0{,}5\sqrt{42}$; |
| **d)** *t*, dacă … | **4)** $x=\sqrt{17}=4{,}123105\ldots$; $y=4{,}1(23)$; $z=4{,}(123)$; $t=4{,}12(3)$. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Dintre numărul rațional $-\dfrac{23}{2}$ și numărul irațional $-\sqrt{132}$, este mai mic numărul $\boxed{\phantom{000}}$.

# LECȚIA 4 Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări

## Rezolvăm împreună

### PROBLEMA 1

Reprezintă pe axă numerele: 1; $\frac{2}{3}$; −0,5; −1.

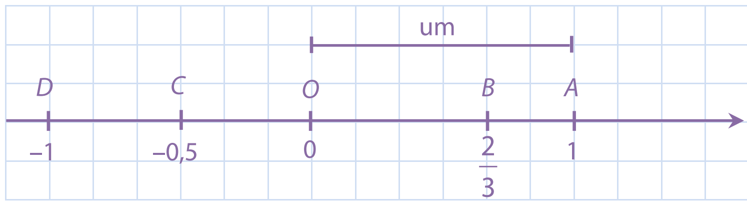
***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Pe axa numerelor, numărului 1 îi corespunde punctul *A*. Notăm *A*(1) și citim punctul *A* are coordonata 1.

Analog, rezultă punctele: $B\left(\frac{2}{3}\right)$; *O*(0); *C*(−0,5); *D*(−1).

**Ne amintim**

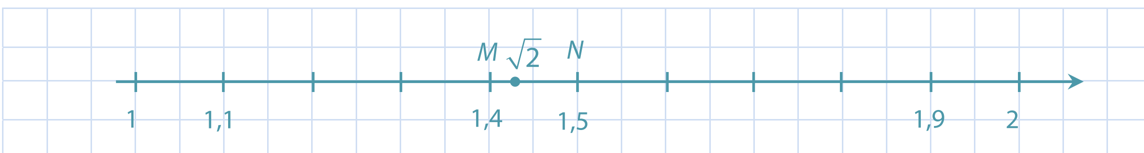
- definiția axei numerelor;
- reprezentarea pe axă a numerelor raționale;
- aproximarea numerelor iraționale.




## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Pentru reprezentarea numerelor iraționale, recurgem la aproximările lor zecimale.

*Exemplu:* Să reprezentăm pe axa numerelor pe $\sqrt{2}$. Deoarece $\sqrt{2}$ = 1,414213562373…, scriem 1,4 < $\sqrt{2}$ < 1,5; îl aproximăm pe $\sqrt{2}$ cu un număr situat între 1,4 și 1,5, iar punctul a cărui coordonată este $\sqrt{2}$ se reprezintă printr-un punct situat între punctele *M*(1,4) și *N*(1,5).




Dacă aproximăm pe $\sqrt{2}$ cu un număr între 1,41 și 1,42, atunci $\sqrt{2}$ va fi coordonata unui punct situat între punctele *P*(1,41) și *Q*(1,42).


Prin continuarea procedeului anterior, se poate reprezenta pe axă numărul $\sqrt{2}$ între două puncte *X* și *Y*, ale căror coordonate sunt aproximările prin lipsă, respectiv prin adaos la a *n*-a zecimală a numărului $\sqrt{2}$.

### PROBLEMA 2

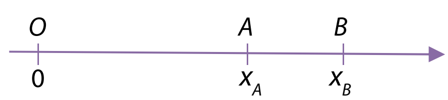
În drum spre bunici, Sandu, aflat în autoturismul tatălui său, traversează podul peste Dunăre de la Brăila. Kilometrajul de bord a indicat 5043,7 km la intrarea pe pod și 5045,9 km la ieșirea de pe pod. Ajută-l pe Sandu să calculeze lungimea podului.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Notând cu *A* punctul de intrare pe pod și cu *B* punctul de ieșire de pe pod, lungimea podului este egală cu distanța parcursă de autoturism, iar aceasta este distanța *AB*.

Figurând pe axa numerelor două puncte, *A* și *B*, și notând cu $x_A$ și $x_B$ coordonatele acestora, unde $x_B > x_A$, rezultă:

$AB = OB - OA = x_B - x_A = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$.




În cazul nostru, numerele $x_A$ și $x_B$ fiind cele indicate de kilometrajul de bord: $x_A$ = 5043,7 (km) și $x_B$ = 5045,9 (km), rezultă:

*AB* = 5045,9 − 5043,7 = 2,2 km.

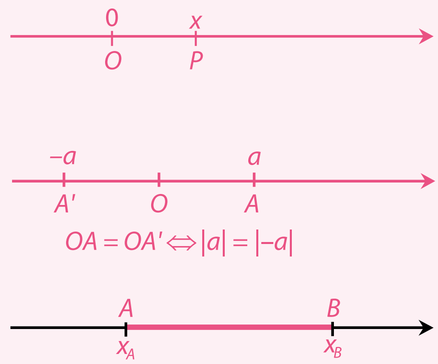
**Știai că...**

Podul peste Dunăre de la Brăila este un pod rutier suspendat, care traversează fluviul între municipiul Brăila și satul Smârdan din România.
Acest pod leagă:
- regiunile istorice Muntenia și Moldova Occidentală cu Dobrogea de Nord;
- orașul Brăila cu Tulcea și Delta Dunării.

Lungimea totală este de 2,194 km.

## Reține!

- Admitem că:
  **1) oricărui număr real îi corespunde pe axa numerelor un punct;**
  **2) oricărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un număr real.** Dacă punctul este notat cu $P$ și numărul este notat cu $x$, atunci spunem că punctul $P$ are **coordonata** $x$ sau că $x$ **este coordonata punctului** $P$ și scriem $P(x)$.
- Două numere reale se numesc **numere opuse** dacă sunt coordonatele a două puncte distincte de pe axa numerelor, egal depărtate de origine. Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci $-a$ este opusul numărului $a$.
- **Pe axa numerelor, distanța dintre punctele $A(x_A)$ și $B(x_B)$ este $AB = |x_B - x_A|$.**



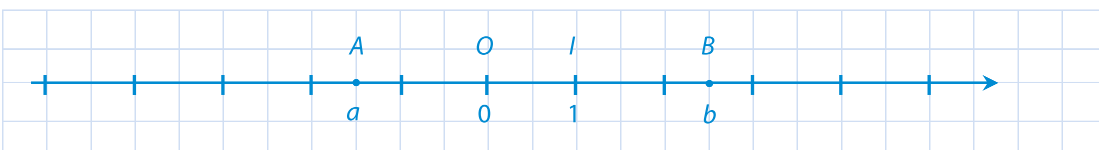

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Reprezintă pe axă numerele: $-\sqrt{4}; \sqrt{9}; -\sqrt{1}; -\sqrt{16}; 2; 0$.

**2** **a)** Aproximează la zecimi prin lipsă numerele iraționale: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ și $\sqrt{5}$.

**b)** Reprezintă pe axă numerele: $-\sqrt{5}; \sqrt{2}; -1; 1; -\sqrt{3}; \sqrt{5}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}$, ținând cont de aproximările de la punctul a).

**3** Analizează cu atenție figura de mai jos și arată că $5 \cdot |a| = 3 \cdot |b|$.




**4** Determină mulțimile și reprezintă elementele fiecăreia pe câte o axă a numerelor:
**a)** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 5\}$; **b)** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$; **c)** $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 1\}$;
**d)** $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\}$; **e)** $E = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid 1 \leq |x| < 4\}$; **f)** $F = \{x \in \mathbb{Z}^* \setminus \mathbb{N} \mid |x| \leq 4\}$.

**5** Reprezintă pe axa numerelor elementele mulțimilor:
**a)** $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| < 5\}$; **b)** $N = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 3| \leq 2\}$.

**6** Pe axa numerelor se consideră punctele $A$ și $B$, astfel încât $OA = 2$ um și $OB = 5$ um, unde um reprezintă unitatea de măsură.
**a)** Scrie coordonatele punctelor $A$ și $B$.
**b)** Calculează $AB$ în fiecare dintre cazurile posibile.

**7** Pe axa numerelor se consideră punctele distincte $M$ și $N$, astfel încât $OM = ON$.
**a)** Dacă coordonata punctului $M$ este $\sqrt{3}$, scrie coordonata punctului $N$.
**b)** Dacă $MN = 5\sqrt{2}$ um, scrie coordonatele punctelor $M$ și $N$.

**8** Pe axa numerelor se consideră punctele $A(1)$ și $B(\sqrt{5})$.

**a)** Scrie trei numere raționale ale căror reprezentări pe axă sunt puncte între $A$ și $B$.

**b)** Scrie trei numere iraționale ale căror reprezentări pe axă sunt puncte între $A$ și $B$.

**9** Luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 3 cm, reprezintă pe axă următoarele numere:

**a)** $-1; 0; -1{,}5; 1{,}5; -0{,}(3); 1{,}(3); 0{,}(6)$;
**b)** $0{,}5; -0{,}(6); 1{,}2; -0{,}(1); 0{,}(2); -1; 1{,}5$.

**10** Alege o unitate de măsură convenabilă și reprezintă pe axă următoarele numere:

$$-\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ 2\sqrt{3};\ -3\sqrt{2};\ \sqrt{5};\ -\sqrt{3};\ \sqrt{2}.$$

**11** Reprezintă pe axa numerelor reale, folosind aproximări, următoarele numere:

$$\sqrt{12};\ -\sqrt{17};\ \sqrt{24};\ -\sqrt{32};\ \sqrt{28};\ -\sqrt{18};\ -\sqrt{12}.$$

**12** Reprezintă pe axă numerele întregi $x$ pentru care $|2x| < \sqrt{19}$.

**13** Calculează distanța dintre punctele $M$ și $N$, dacă:

**a)** $M(-\sqrt{2})$ și $N(\sqrt{2})$;
**b)** $M(-3\sqrt{3})$ și $N(2\sqrt{18})$.

**14** Se consideră mulțimile $A = \left\{-\sqrt{1{,}96}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\sqrt{1{,}44}\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = |y| \text{ și } y \in A\}$. Scrie elementele mulțimii $M$, formată din elementele mulțimii $A \cup B$ care se află la o distanță mai mică sau egală cu 0,5 față de origine.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

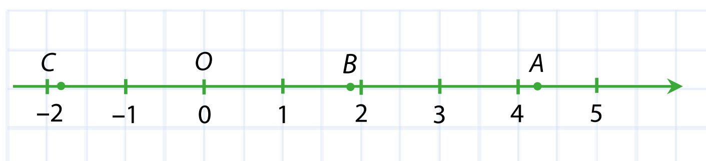
**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

Punctele $A$ și $B$, reprezentate pe axa numerelor, au coordonatele $x_A$ și $x_B$ printre numerele $\sqrt{3{,}7}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{18}$ și $\sqrt{4{,}7}$, iar punctul $C$ este simetricul punctului $B$ față de punctul $O$. Rezultă:

**a)** $x_A = \sqrt{27}$; A F

**b)** $x_B = \sqrt{3{,}7}$; A F

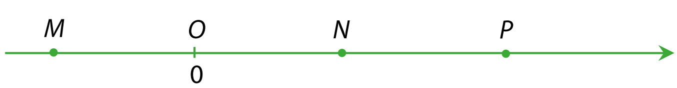
**c)** $x_C = -\sqrt{3{,}7}$. A F




**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Pe axa numerelor, cu originea în punctul $O$, sunt reprezentate punctele $M$, $N$ și $P$. Punctul $N$ este mijlocul segmentului $OP$, iar punctul $O$ este mijlocul segmentului $MN$. Se notează cu $x_M$, $x_N$ și $x_P$ coordonatele acestor puncte. Dacă $x_P = \sqrt{8}$, atunci:

| | |
|---|---|
| **a)** $x_M$ este egal cu … | **1)** $-\sqrt{2}$; |
| **b)** $x_N$ este egal cu … | **2)** $\sqrt{2}$; |
| **c)** $MP$ este egal cu … | **3)** $3\sqrt{2}$; |
| **d)** $MN$ este egal cu … | **4)** $2\sqrt{3}$; |
| | **5)** $2\sqrt{2}$. |




**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Fie punctele $A(\sqrt{3})$ și $B(-\sqrt{12})$. Pătratul distanței $AB$ este egal cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# EVALUAREA UNITĂȚII DE ÎNVĂȚARE

## TEST

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.**

(5p) **1.** Numerele reale care au modulul egal cu $\sqrt{11}$ sunt … .

(5p) **2.** Numerele întregi care au modulul mai mic decât $\sqrt{12}$ sunt … .

(5p) **3.** Ordonând crescător numerele $5\sqrt{2}$, $4\sqrt{3}$ și 7, obținem … .

(5p) **4.** Dacă $a \in \mathbb{R}$ și $a < 0$, atunci $|a| = \dots$ .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare număr aflat în coloana A cu descrierea corespunzătoare din coloana B.**

| A | B |
|---|---|
| (5p) **1.** $\sqrt{196}$ … | **a)** este număr rațional, dar nu întreg; |
| (5p) **2.** $\sqrt{97}$ … | **b)** este număr natural; |
| (5p) **3.** $\sqrt{1,(7)}$ … | **c)** este număr irațional; |
| (5p) **4.** $-\sqrt{\dfrac{245}{5}}$ … | **d)** este număr întreg, dar nu natural; |
| | **e)** este număr întreg, dar nu rațional. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) **1.** Dacă $x = \sqrt{5,(4)}$, atunci:
**A.** $x \in \mathbb{N}$; **B.** $x \in \mathbb{Z}$; **C.** $x \in \mathbb{Q}$; **D.** $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(5p) **2.** Ordinea descrescătoare a numerelor $a = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$, $b = \dfrac{30}{\sqrt{5}}$ și $c = \dfrac{18}{\sqrt{3}}$ este:
**A.** $a, b, c$; **B.** $c, a, b$; **C.** $b, c, a$; **D.** $b, a, c$.

(5p) **3.** Se consideră mulțimea $M = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{2024}\right\}$. Numărul elementelor mulțimii $M \cap \mathbb{Q}$ este egal cu:
**A.** 24; **B.** 44; **C.** 32; **D.** 34.

(5p) **4.** Dacă $x$ este număr natural și $\sqrt{55 - 5 \cdot x}$ este număr rațional, atunci:
**A.** $x \in \{0, 1, 2\}$; **B.** $x \in \{6, 11\}$; **C.** $x \in \{3, 4, 5\}$; **D.** $x \in \{0, 5\}$.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

(5p) **IV. a)** Scrie trei numere întregi nenule cuprinse între $-\sqrt{5}$ și $\sqrt{2}$.

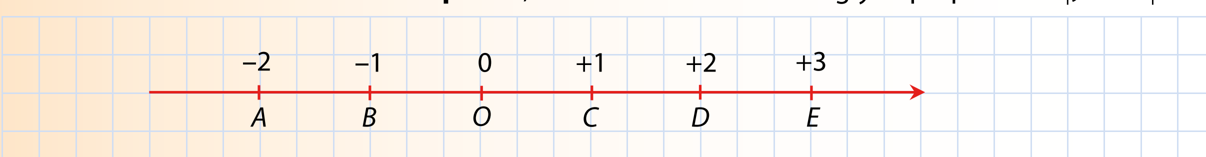
(5p) **b)** Scrie trei numere iraționale cuprinse între –4 și –3.

(5p) **c)** Determină $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $n < 5\sqrt{3} < n+1$.

(5p) **V. a)** Folosind teorema lui Pitagora și compasul, reprezintă pe axa numerelor din figura de mai jos punctele $M\left(-\sqrt{3}\right)$ și $N\left(\sqrt{5}\right)$.

(5p) **b)** Scrie numerele reale $x$ cu proprietatea $|x| = \sqrt{2}$.

(5p) **c)** Privind modulul diferenței a două numere reale ca fiind **distanța dintre punctele ale căror coordonate sunt aceste numere pe axă**, determină numerele întregi $y$ cu proprietatea $\left|y - \sqrt{2}\right| < 3$.




Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# UNITATEA: OPERAȚII CU NUMERE REALE

## LECȚIA 1 Introducere. Produs și cât de radicali. Raționalizare

### Introducere. Produs și cât de radicali

În problemele din viața cotidiană apar operații cu numere reale. Pentru efectuarea operațiilor respective, se recurge la aproximarea numerelor reale prin fracții zecimale finite. În aceste situații, trebuie să reținem că rezultatul este cu atât mai bun, cu cât numerele reale sunt aproximate prin fracții zecimale cu un număr cât mai mare de zecimale. Altfel spus, aproximările trebuie făcute la miimi, zecimi de miimi, sutimi de miimi etc. Problema pe care o propunem mai jos are ca scop să te convingă de acest lucru.

#### Rezolvăm împreună

**PROBLEMA 1**

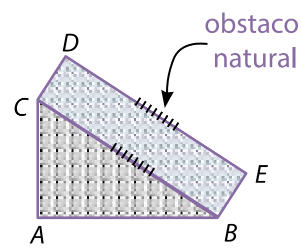
Suprafața unui teren *ACDEB*, reprezentată schematic în figura de mai jos, este caracterizată de următoarele date:

**1)** $AB \perp AC$;

**2)** *CDEB* este dreptunghi;

**3)** prin măsurători directe, s-a stabilit că $AB = 16$ hm, $AC = 8$ hm, $CD = 2{,}125$ hm;

**4)** distanțele *BC* și *ED*, din cauza unor obstacole naturale, nu pot fi măsurate direct.




Suprafața de teren *CDEB* trebuie tratată cu o substanță specială, foarte scumpă. Știind că tratarea unei suprafețe de 1 hm$^2$ costă 10000 de lei, calculează costul necesar tratării suprafeței *CDEB*.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Distanța *BC* se calculează cu ***teorema lui Pitagora***. Triunghiul *ABC* fiind dreptunghic, rezultă că $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Din $AB^2 = 256$ hm$^2$ și $AC^2 = 64$ hm$^2$ rezultă că $BC = \sqrt{320}$ hm.

Având lungimile laturilor suprafeței *CDEB*, putem calcula aria acestei suprafețe, arie pe care o notăm cu $\mathscr{A}_{CDEB}$ (citim „aria suprafeței *CDEB*").

Deoarece *CDEB* este dreptunghi, rezultă că $\mathscr{A}_{CDEB} = CD \cdot BC$, de unde $\mathscr{A}_{CDEB} = 2{,}125 \cdot \sqrt{320}$ hm$^2$.

Din punct de vedere practic, rezultatul scris în această formă nu convine. Se impune efectuarea produsului $2{,}125 \cdot \sqrt{320}$.

Propunem următoarele variante de calcul:

**1** Rotunjirile la *prima zecimală* a lui 2,125, respectiv a lui $\sqrt{320} = 17{,}888...$ sunt numerele raționale 2,1, respectiv 17,9. Conform calculului alăturat, rezultă că $\mathscr{A}_{CDEB} = 37{,}59$ hm$^2$. Deoarece $37{,}59 \cdot 10000 = 375900$, costul necesar tratării suprafeței *CDEB* este egal cu **375900** de lei.

$$2{,}125 \cdot \sqrt{320} = \\ = 2{,}1 \cdot 17{,}9 = \\ = 37{,}59$$

**2** Rotunjind pe $\sqrt{320}$ la a treia zecimală, din $\sqrt{320} = 17{,}888543819998\ldots$ rezultă că $\sqrt{320} = 17{,}889$. Conform calculului alăturat, rezultă că $\mathscr{A}_{CDEB} = 38{,}014125$ hm$^2$. Cum $38{,}014125 \cdot 10000 = 380141{,}25$, costul necesar tratării suprafeței *CDEB* este egal cu **380141,25** de lei.

$$2{,}125 \cdot \sqrt{320} = \\ = 2{,}125 \cdot 17{,}889 = \\ = 38{,}014125$$

**3** Pentru efectuarea produsului $2{,}125 \cdot \sqrt{320}$, vom utiliza *formula de scoatere a unui factor de sub radical și formula de introducere a unui factor sub radical:*

$$2{,}125 \cdot \sqrt{320} = 2{,}125 \cdot \sqrt{64 \cdot 5} = 2{,}125 \cdot \sqrt{8^2 \cdot 5} = 2{,}125 \cdot 8\sqrt{5} = 17\sqrt{5} = \sqrt{17^2 \cdot 5} = \sqrt{1445}.$$

$$\boxed{\sqrt{8^2 \cdot 5} = 8\sqrt{5}}$$
*scoaterea factorului 8 de sub radical*

$$\boxed{17\sqrt{5} = \sqrt{17^2 \cdot 5}}$$
*introducerea factorului 17 sub radical*

Dar $\sqrt{1445} = 38{,}0131556174\ldots$ . Pentru o estimare a costului și o soluționare concretă a problemei, aproximăm pe $\sqrt{1445}$ la a șasea zecimală. Pentru $\sqrt{1445} = 38{,}013155$, având în vedere că $38{,}013155 \cdot 10000 = 380131{,}55$, obținem costul necesar tratării suprafeței *CDEB* egal cu **380131,55 de lei**.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

◆ Ultima estimare este suficient de bună, deoarece conține o singură aproximare cu o eroare mai mică decât 0,000001.

◆ Prima estimare conține două aproximări, fiecare cu o eroare mai mică decât o zecime. Între estimarea **1** și estimarea **3** ale costului există o diferență în minus, deloc neglijabilă, de 4231,55 de lei, deoarece: 375900 – 380131,55 = –4231,55. Între estimarea **2** și estimarea **3** ale costului există o diferență în plus, de 9,70 de lei, deoarece: 380141,25 – 380131,55 = +9,70. Prin urmare, prin estimarea **1**, suma de 375900 de lei nu este suficientă pentru tratarea suprafeței (mai sunt necesari 4231,55 de lei), iar, prin estimarea **2**, suma de 380141,25 depășește costul tratării suprafeței cu 9,70 de lei.

### PROBLEMA 2

Fie două numere reale $a \geq 0$ și $b \geq 0$.

**a)** Arată că $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$. Justifică răspunsul.

**b)** Calculează pătratul numărului $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

**c)** Arată că $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

***Rezolvare** (activitate frontală):*

**a)** Numărul $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$, deoarece $\sqrt{a} \geq 0$ și $\sqrt{b} \geq 0$.

**b)** $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b$.

**c)** Deoarece $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ este un număr pozitiv al cărui pătrat este $a \cdot b$, din definiția rădăcinii pătrate rezultă că $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

> Dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, atunci:
> $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.
>
> **Radicalul unui produs este egal cu produsul radicalilor.**

### PROBLEMA 3

Fie $a$ și $b$ două numere reale pozitive, cu $b \neq 0$.

**a)** Numărul $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ este pozitiv? Justifică răspunsul.

**b)** Calculează pătratul numărului $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

**c)** Arată că: $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

**Rezolvarea** – activitate individuală

> Dacă $a \geq 0$ și $b > 0$, atunci:
> $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
>
> **Radicalul unui cât este egal cu câtul radicalilor.**

### Reține!

◆ Pentru efectuarea operațiilor cu numere reale, se recurge la aproximarea numerelor reale prin fracții zecimale finite.

◆ Pentru obținerea unui rezultat final cât mai bun, ori de câte ori este posibil, operațiile se fac cu numerele reprezentate prin fracții ordinare ireductibile sau prin radicali, aplicând regulile de calcul și proprietățile studiate.

◆ Atunci când se cere sau atunci când se impune, rezultatul final se estimează prin aproximări. Rezultatul este cu atât mai bun, cu cât numerele reale sunt aproximate prin fracții zecimale cu un număr cât mai mare de zecimale.

◆ Radicalul unui produs este egal cu produsul radicalilor.

◆ Radicalul unui cât este egal cu câtul radicalilor.

## Aplicăm cunoștințele

**a)** Utilizând regula de calcul $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $(a, b \geq 0)$, calculează și scrie rezultatul sub formă de număr natural:

i) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$; ii) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$; iii) $\sqrt{0{,}75} \cdot \sqrt{12}$.

**b)** Utilizând regula de calcul $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $(a \geq 0;\ b > 0)$, calculează și scrie rezultatul sub formă de fracție zecimală (finită sau periodică):

i) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{18}}$; ii) $\dfrac{\sqrt{6{,}4}}{\sqrt{40}}$; iii) $\dfrac{\sqrt{15} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{27}}$.

*Rezolvare (activitate pe grupe):*

**a)** iii) $\sqrt{0{,}75}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{0{,}75\cdot 12}=\sqrt{9}=3$;

**b)** iii) $\dfrac{\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{27}}=\dfrac{\sqrt{15\cdot 5}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{15\cdot 5^{(3}}{27}}=\sqrt{\dfrac{25}{9}}=1,(6)$.

## Teme de investigație și Portofoliu

**1)** Radicalul unei sume este egal cu suma radicalilor?
**2)** Radicalul unei diferențe este egal cu diferența radicalilor?

## ◆ Raționalizarea numitorului de forma $a\sqrt{b}$

### Rezolvăm împreună

**EXERCIȚIUL 1**

**a)** Copiază și completează egalitățile: $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{105}}=\sqrt{\dfrac{...}{...}}=\sqrt{\dfrac{3\cdot ...}{...\cdot 5\cdot 7}}=\sqrt{\dfrac{...}{5}}=\dfrac{...}{\sqrt{5}}$; $\quad \dfrac{1}{\sqrt{5}}={}^{\sqrt{5})}\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot ...}=\dfrac{\sqrt{...}}{...}$.

**b)** Compară numerele: $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{105}}$ și $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

*Rezolvare (activitate frontală):*

**a)** $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{105}}=\sqrt{\dfrac{21}{105}}=\sqrt{\dfrac{3\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7}}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ și ${}^{\sqrt{5})}\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

**b)** Deoarece $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{105}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ și $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ (vezi punctul a)), rezultă că $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{105}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.


**EXERCIȚIUL 2**

Fie $a$ și $b$ două numere reale, cu $a>0$ și $b>0$. Demonstrează că: $\dfrac{1}{a\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{b}}{ab}$.

*Rezolvare (activitate frontală):*

Amplificăm fracția $\dfrac{1}{a\sqrt{b}}$ cu $\sqrt{b}$. Rezultă că ${}^{\sqrt{b})}\dfrac{1}{a\sqrt{b}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{b}}{a\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{b}}{ab}$.

### Reține!

- Operația prin care se elimină radicalul de la numitorul unei fracții se numește **raționalizarea numitorului**.
- Numitorul unei fracții de forma $a\sqrt{b}$ $(b>0)$ se raționalizează prin amplificarea fracției cu $\sqrt{b}$.

### Aplicăm cunoștințele

Raționalizează numitorii fracțiilor:

**a)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; **b)** $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$; **c)** $\dfrac{7\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$; **d)** $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{42}}$.

*Rezolvare (activitate frontală):*

**a)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}={}^{\sqrt{3})}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

**b)** $\dfrac{2}{3\sqrt{5}}={}^{\sqrt{5})}\dfrac{2}{3\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$;

**c)** $\dfrac{7\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}={}^{\sqrt{3})}\dfrac{7\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{18}}{2\cdot 3}=\dfrac{7\cdot\cancel{3}\sqrt{2}}{2\cdot\cancel{3}}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$;

**d)** $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{42}}=\sqrt{\dfrac{6}{42}}={}^{\sqrt{7})}\dfrac{1}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Folosind proprietatea $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a, b \geq 0$, scrie ca un singur radical:

**a)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; **b)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$; **c)** $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$; **d)** $\sqrt{3x}\cdot\sqrt{2y}$ $(x \geq 0, y \geq 0)$.

**2** Calculează fiecare produs și scrie rezultatul sub formă de număr natural:

**a)** $\sqrt{8}\cdot\sqrt{98}$; **b)** $\sqrt{27}\cdot\sqrt{12}$; **c)** $\sqrt{18}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{24}$; **d)** $\sqrt{48}\cdot\sqrt{84}\cdot\sqrt{63}$.

**3** Folosind proprietatea $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a \geq 0$ și $b > 0$, scrie ca un singur radical:

**a)** $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$; **b)** $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{5}}$; **c)** $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{7}}$; **d)** $\frac{\sqrt{5xy}}{\sqrt{3x^2}}$ $(x \geq 0, y > 0)$.

**4** Calculează fiecare raport și scrie rezultatul sub formă de număr natural:

**a)** $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; **b)** $\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}}$; **c)** $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; **d)** $\frac{\sqrt{75x^2y}}{\sqrt{3y}}$ $(x \geq 0, y > 0)$.

**5** Copiază, calculează și completează tabelele următoare:

| $a$ | $b$ | $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ | $\sqrt{ab}$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 9 | ? | ? |
| 25 | 16 | ? | ? |
| 49 | 36 | ? | ? |
| 9 | 100 | ? | ? |

| $a$ | $b$ | $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ | $\sqrt{\frac{a}{b}}$ |
|---|---|---|---|
| 36 | 4 | ? | ? |
| 81 | 9 | ? | ? |
| 100 | 25 | ? | ? |
| 64 | 16 | ? | ? |

**6** Raționalizează numitorii fracțiilor: **a)** $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{6}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}$; **b)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{42}}, \frac{12}{\sqrt{10}}, \frac{10}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}, \frac{\sqrt{140}}{2\sqrt{7}}$.

**7** Copiază și completează tabelul:

| **Fracția cu numitor irațional** | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $-\frac{2}{\sqrt{6}}$ | $\frac{8}{\sqrt{54}}$ | $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$ | $-\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$ | $\frac{10}{-\sqrt{20}}$ | $\frac{-6}{3\sqrt{2}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Fracția cu numitor raționalizat** | | | | | | | |

**8** Raționalizează numitorii și scrie în ordine crescătoare numerele:

**a)** $a=\frac{10}{2\sqrt{5}}, b=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5}}, c=\frac{6}{\sqrt{2}}$; **b)** $a=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, b=\frac{10}{-3\sqrt{5}}, c=-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$.

**9** Utilizând regula de calcul $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ $(a, b \geq 0)$, calculează fiecare produs și scrie rezultatul sub formă de număr natural:

**a)** $\sqrt{18}\cdot\sqrt{32}$; **b)** $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$; **c)** $\sqrt{9{,}61}\cdot\sqrt{1600}$.

**10** Utilizând regula de calcul $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $(a \geq 0, b > 0)$, calculează fiecare raport și scrie rezultatul sub formă de fracție zecimală finită sau periodică:

**a)** $\frac{\sqrt{76}}{\sqrt{304}}$; **b)** $\frac{\sqrt{3{,}4}}{\sqrt{13{,}6}}$; **c)** $\frac{\sqrt{125}\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{48}}$.

**11** **a)** Calculează: $\sqrt{12^2+5^2}$ și $\sqrt{12^2}+\sqrt{5^2}$; $\sqrt{20^2+21^2}$ și $\sqrt{20^2}+\sqrt{21^2}$; $\sqrt{6^2+8^2}$ și $\sqrt{6^2}+\sqrt{8^2}$.

**b)** Precizează valoarea de adevăr a propoziției: Radicalul unei sume **nu este egal** cu suma radicalilor.

**12** **a)** Calculează: $\sqrt{13^2-5^2}$ și $\sqrt{13^2}-\sqrt{5^2}$; $\sqrt{29^2-21^2}$ și $\sqrt{29^2}-\sqrt{21^2}$; $\sqrt{10^2-6^2}$ și $\sqrt{10^2}-\sqrt{6^2}$.

**b)** Precizează valoarea de adevăr a propoziției: Radicalul unei diferențe **nu este egal** cu diferența radicalilor.

**13** Scoate factorii de sub radical: **a)** $\sqrt{810}, \sqrt{1620}, \sqrt{7875}$; **b)** $\sqrt{\frac{324}{576}}, \sqrt{\frac{720}{4500}}, \sqrt{\frac{3675}{7500}}$.

**14** Compară numerele:

**a)** $8\sqrt{5}$ și $\sqrt{321}$; **b)** $-8\sqrt{5}$ și $-\sqrt{321}$; **c)** $7\sqrt{15}$ și $12\sqrt{5}$;

**d)** $-7\sqrt{15}$ și $-12\sqrt{5}$; **e)** $21$ și $2\sqrt{110}$; **f)** $-21$ și $-2\sqrt{110}$.

**15** Introdu factorii sub radical, scriind condițiile necesare în fiecare dintre cazurile următoare:

**a)** $x\sqrt{2}, -y\sqrt{5s}, 3z^2\sqrt{7}, -2t^2\sqrt{11}$; **b)** $x\sqrt{7x}, y\sqrt{\frac{3}{y}}, -7z^3\sqrt{\frac{5}{z}}, -5t^2n\sqrt{2n}$.

**16** Scoate factorii de sub radical, scriind condițiile necesare în fiecare dintre cazurile următoare:

**a)** $\sqrt{12x^2}, \sqrt{18y^4}, \sqrt{24a^2b^3}, \sqrt{8a^3b^2}$; **b)** $\sqrt{\frac{49x}{25y^2}}, \sqrt{\frac{12a^3b^2}{36c^4}}, \sqrt{\frac{9a^2b^2}{c^2}}, \sqrt{\frac{175x^3y^3}{12x}}$.

**17** Raționalizează numitorii fracțiilor: $\frac{5\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{3}}, \frac{-9}{2\sqrt{27}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{147}}, \frac{-\sqrt{320}}{\sqrt{432}}$.

**18** Compară numerele:

**a)** $5\sqrt{5}$ și $\frac{25}{\sqrt{5}}$; **b)** $4\sqrt{3}$ și $\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; **c)** $\frac{18}{\sqrt{6}}$ și $3\sqrt{7}$.

**19** Calculează $x$ din egalitățile:

**a)** $\frac{x}{\sqrt{108}} = \frac{\sqrt{27}}{4}$; **b)** $\frac{\sqrt{150}}{x} = \frac{6}{\sqrt{54}}$; **c)** $\frac{\sqrt{216}}{15} = \frac{x}{\sqrt{600}}$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu:** 1 punct

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** 3 puncte

Dacă $a$ și $b$ sunt numere raționale pozitive, atunci:

**a)** $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$; A F

**b)** $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; A F

**c)** $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. A F

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** 4,5 puncte

Pentru două numere raționale $x$ și $y$, notăm cu $z$ rezultatul calculului $\sqrt{\frac{36x^5y^3}{12x^3y}}$. Rezultă că:

**a)** dacă $xy \neq 0$ ... **1)** $z$ este egal cu $xy\sqrt{3}$;

**b)** dacă $x > 0$ și $y > 0$ ... **2)** $z$ este egal cu $-xy\sqrt{3}$;

**c)** dacă $xy < 0$ ... **3)** $z$ este egal cu $-|x| \cdot |y|\sqrt{3}$;

**4)** $z$ este egal cu $|x| \cdot |y|\sqrt{3}$.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** 1,5 puncte

Raționalizând numitorul fracției $\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, rezultă o fracție care are la numitor numărul natural 9, iar la numărător are rădăcina pătrată a numărului natural ☐.

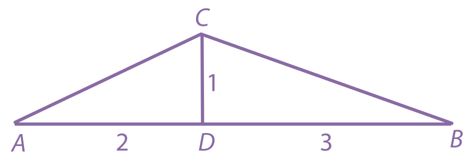
# LECȚIA 2 Adunarea și scăderea numerelor reale

## Ne amintim

- proprietățile adunării numerelor raționale;
- aproximarea numerelor iraționale.

## Rezolvăm împreună

### Problema 1




Suprafața unui teren $ABC$, reprezentată schematic în figura alăturată, este caracterizată de următoarele date: $ADC$ și $BDC$ sunt triunghiuri dreptunghice, $AD = 2$ hm, $BD = 3$ hm și $CD = 1$ hm.
Calculează lungimea traseului $A – C – B$, știind că $\sqrt{5} = 2{,}2360679774\ldots$ și $\sqrt{10} = 3{,}162277660\ldots$ .

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice $ACD$ și $BCD$, $AC^2 = AD^2 + CD^2$ și $BC^2 = BD^2 + CD^2$, obținem $AC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ și $AC = \sqrt{5}$, respectiv $BC^2 = 3^2 + 1^2 = 10$ și $BC = \sqrt{10}$.
Folosind aproximările numerelor $\sqrt{5}$ și $\sqrt{10}$ prin lipsă și prin adaos, întâi la zecimi, apoi la sutimi, după aceea la miimi și așa mai departe, obținem rezultatele următoare.

**1**

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$
$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$$
$$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$$
$$2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361$$

**2**

$$3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$$
$$3{,}16 < \sqrt{10} < 3{,}17$$
$$3{,}162 < \sqrt{10} < 3{,}163$$
$$3{,}1622 < \sqrt{10} < 3{,}1623$$

**3**

$$2{,}2 + 3{,}1 < \sqrt{5} + \sqrt{10} < 2{,}3 + 3{,}2$$
$$2{,}23 + 3{,}16 < \sqrt{5} + \sqrt{10} < 2{,}24 + 3{,}17$$
$$2{,}236 + 3{,}162 < \sqrt{5} + \sqrt{10} < 2{,}237 + 3{,}163$$
$$2{,}2360 + 3{,}1622 < \sqrt{5} + \sqrt{10} < 2{,}2361 + 3{,}1623$$

**4**

$$5{,}3 < \sqrt{5} + \sqrt{10} < 5{,}5 \qquad (a)$$
$$5{,}39 < \sqrt{5} + \sqrt{10} < 5{,}41 \qquad (b)$$
$$5{,}398 < \sqrt{5} + \sqrt{10} < 5{,}40 \qquad (c)$$
$$5{,}3982 < \sqrt{5} + \sqrt{10} < 5{,}3984 \qquad (d)$$

- Din inegalitățile (*a*) rezultă că $\sqrt{5}+\sqrt{10} \approx 5$ (*aproximarea exactă la unități*).
- Din (*b*) rezultă că $\sqrt{5}+\sqrt{10} \approx 5{,}3$ (*aproximarea cu o zecimală exactă*).
- Din (*c*) rezultă că $\sqrt{5}+\sqrt{10} \approx 5{,}39$ (*aproximarea cu două zecimale exacte*).
- Din (*d*) rezultă că $\sqrt{5}+\sqrt{10} \approx 5{,}398$ (*aproximarea cu trei zecimale exacte*).

Dacă aproximăm numerele $\sqrt{5}$ și $\sqrt{10}$ prin lipsă și prin adaos la zecimi de milionimi (șapte zecimale), rezultă:

$$2{,}2360679 < \sqrt{5} < 2{,}2360680 \text{ și } 3{,}1622776 < \sqrt{10} < 3{,}1622777 \text{ și } 5{,}3983455 < \sqrt{5} + \sqrt{10} < 5{,}3983457$$

Prin urmare, va rezulta că $\sqrt{5}+\sqrt{10} \approx 5{,}3983$ (*cu patru zecimale exacte*).
Deoarece lungimea traseului $A – C – B$, notată $S$, este suma lungimilor segmentelor $AC$ și $BC$, adică $S = AC + BC = \sqrt{5}+\sqrt{10}$, rezultă următoarele estimări ale acesteia: $S \approx 5{,}3$ hm (*cu o zecimală exactă*), $S \approx 5{,}39$ hm (*cu două zecimale exacte*), $S \approx 5{,}398$ hm (*cu trei zecimale exacte*), $S \approx 5{,}3983$ hm (*cu patru zecimale exacte*).
Cea mai bună estimare pentru lungimea traseului este $S \approx 5{,}3983$ hm = 539,83 m. Din punct de vedere practic, este suficient să aproximăm lungimea traseului cu 540 m.

**Cum calculez suma a două numere reale?**

**Observații:**

**1.** Rezolvarea problemei anterioare arată că, pentru a efectua suma a două numere reale iraționale, se aproximează cele două numere prin fracții zecimale finite și se efectuează suma acestora.

**2.** Reținem că efectuarea unor astfel de operații este anevoioasă și că rezultatul operațiilor numerelor iraționale aproximate prin numere raționale nu este exact.

## Problema 2

Se consideră suma de numere reale $S = \frac{7}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right) + \sqrt{15} + (-\sqrt{27})$, unde $\sqrt{15} = 3{,}872983346207417\ldots$ și $\sqrt{27} = 5{,}196152422706632\ldots$.

**a)** Aproximează fiecare termen al sumei $S$ prin lipsă cu o eroare de o sutime.

**b)** Utilizând aproximările anterioare, calculează valoarea sumei $S$.

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

**a)** Deoarece $\frac{7}{6} = 1{,}1(6)$ și $-\frac{4}{3} = -1{,}(3)$, rezultă următoarele aproximări cu o eroare de o sutime: $\frac{7}{6} \approx 1{,}16$ și $-\frac{4}{3} \approx -1{,}33$. Deoarece $\sqrt{15} = 3{,}872983346207417\ldots$ și $\sqrt{27} = 5{,}196152422706632\ldots$, rezultă cu o eroare de o sutime că: $\sqrt{15} \approx 3{,}87$ și $-\sqrt{27} \approx -5{,}19$.

**b)** Calculăm $S \approx 1{,}16 - 1{,}33 + 3{,}87 - 5{,}19 = -1{,}49$ (o valoare aproximativă a sumei $S$).

### Reține!

- **Suma** a două numere reale, $a$ și $b$, este un număr real, notat $a + b$.
  - Operația prin care se obține suma a două numere reale se numește **adunarea numerelor reale**.
  - **Adunarea numerelor reale are aceleași proprietăți ca și adunarea numerelor raționale.**
- **Diferența** dintre numărul real $a$ și numărul real $b$ este un număr real, notat $a - b$, definit astfel: $a - b = a + (-b)$ (diferența dintre numărul real $a$ și numărul real $b$ este suma lui $a$ cu opusul lui $b$).
  - Operația prin care se obține diferența dintre două numere reale se numește **scăderea numerelor reale**.
- Adunarea a două numere, dintre care cel puțin unul este irațional, se efectuează folosind aproximări ale celor două numere.
- Adunarea numerelor de forma $a\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $n \neq k^2$, cu $k \in \mathbb{N}$, se efectuează fie folosind aproximări ale radicalilor, fie folosind regula: $p\sqrt{n} + q\sqrt{n} = (p + q)\sqrt{n}$.

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Copiază și completează tabelul de mai jos, care conține **proprietățile adunării numerelor reale**.

| Proprietatea | Definirea proprietății |
|---|---|
| Asociativitatea | ? |
| Existența elementului neutru | ? |
| Orice număr real $x$ are un opus, notat $-x$. | Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, există $-x \in \mathbb{R}$, astfel încât: $x + (-x) = (-x) + x = 0$. |
| Comutativitatea | ? |
| Adunarea unui termen la o egalitate<br>Scăderea unui termen dintr-o egalitate | Oricare ar fi numerele reale $a$, $b$ și $c$: dacă $a = b$, atunci $a \pm c = b \pm c$. |
| Adunarea a două egalități | ? |
| Adunarea unui termen la o inegalitate<br>Scăderea unui termen dintr-o inegalitate | ? |
| Adunarea a două inegalități | Oricare ar fi numerele reale $a$, $b$, $c$ și $d$: dacă $a < b$ și $c < d$, atunci $a + c < b + d$.<br>(Proprietatea se menține și pentru celelalte relații de ordine: $>$, $\leq$, $\geq$.) |

## Temă de investigație

Considerând suma de numere reale $S = 7 + \left(-\frac{4}{3}\right) + \sqrt{14} + (-\sqrt{27})$, unde $\sqrt{14} = 3{,}741657386773941...$ și $\sqrt{27} = 5{,}196152422706632...$, dacă fiecare termen al sumei $S$ se înlocuiește cu aproximarea sa la două zecimale exacte, rezultă că $S \approx 4{,}22$.

Stabilește dacă 4,22 este sau nu o valoare aproximativă a lui $S$ cu două zecimale exacte.

Completează concluzia investigației, astfel încât propoziția următoare să fie adevărată:

*Dacă într-o sumă de numere reale, notată cu S, fiecare termen al sumei se aproximează cu n zecimale exacte ($n \geq 1$) și se calculează suma obținută, valoarea rezultată … o valoare aproximativă a lui S cu n zecimale exacte.*

### Exercițiul 2

**a)** Calculează: $(-\sqrt{7}+5)+\sqrt{7}$.

**b)** Justifică fiecare etapă de calcul.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

| Etapa de calcul | Justificarea etapei de calcul |
|---|---|
| 1 $(-\sqrt{7}+5)+\sqrt{7}$ | start |
| 2 $= \left[5+(-\sqrt{7})\right]+\sqrt{7}$ | comutativitate |
| 3 $= 5+\left[(-\sqrt{7})+\sqrt{7}\right]$ | asociativitate |
| 4 $= 5+0$ | adunarea numerelor opuse $-\sqrt{7}$ și $\sqrt{7}$ |
| 5 $= 5$ | 0 este element neutru la adunare |

### Proiect

**Proprietățile adunării numerelor reale** sunt foarte importante. Adaugă la **portofoliul personal** aceste proprietăți, însoțite de verificarea lor prin exemple proprii.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Calculează:

**a)** $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}$; **b)** $4\sqrt{2}-5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$; **c)** $-2\sqrt{5}+10\sqrt{5}-7\sqrt{5}$;

**d)** $3\sqrt{7}-(2\sqrt{7}-5\sqrt{7}+\sqrt{7})-4\sqrt{7}$; **e)** $4+\sqrt{4}$; **f)** $9+\sqrt{9}$.

**2** Compară numerele:

**a)** $7+3\sqrt{2}$ și $7+2\sqrt{3}$; **b)** $-5\sqrt{2}+11$ și $-\sqrt{49}+11$; **c)** $|3\sqrt{2}-5|$ și $|5-4\sqrt{2}|$.

**3** Copiază și completează tabelul:

| ***a*** | $2\sqrt{3}$ | $7\sqrt{2}$ | $4\sqrt{5}$ | | | $-9\sqrt{6}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***b*** | | $-4\sqrt{2}$ | | | $3\sqrt{7}$ | $4\sqrt{6}$ | |
| ***a + b*** | | | $11\sqrt{5}$ | | | | $5\sqrt{10}$ |
| ***a – b*** | | | | $4\sqrt{11}$ | $-5\sqrt{7}$ | | |
| ***–b*** | $-5\sqrt{3}$ | | | $14\sqrt{11}$ | | | $-6\sqrt{10}$ |

**4** Calculează $x + y$ și $x - y$ în fiecare dintre cazurile următoare:

**a)** $x = 2\sqrt{7} - 5\sqrt{2},\ y = -3\sqrt{7} + 4\sqrt{2};$ **b)** $x = 5\sqrt{11} + 3,\ y = -11\sqrt{11} + 5;$

**c)** $x = 3\sqrt{2} - 2,\ y = 2 - 3\sqrt{2};$ **d)** $x = \sqrt{3} - \sqrt{2},\ y = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}.$

**5** Calculează, după ce ai scos factorii de sub radical:

**a)** $\sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{27};$ **b)** $\sqrt{8} + \sqrt{72} - \sqrt{128};$ **c)** $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{125};$

**d)** $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63};$ **e)** $\sqrt{27} + 3\sqrt{147} + \sqrt{75} - 2\sqrt{27};$ **f)** $-7\sqrt{18} + 9\sqrt{8} + 5\sqrt{98} - 12\sqrt{2}.$

**6** Calculează $a + b$ și $a - b$, dacă $a = \sqrt{\left(2\sqrt{5} - 5\right)^2}$ și $b = \sqrt{\left(1 + 2\sqrt{5}\right)^2}.$

**7** Scoate factorii de sub radical, apoi efectuează:

**a)** $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} + \sqrt{50};$ **b)** $\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{75};$

**c)** $\sqrt{5} + \sqrt{20} + \sqrt{45} + \sqrt{125} + \sqrt{180};$ **d)** $\sqrt{7} + \sqrt{28} + \sqrt{63} + \sqrt{112} + \sqrt{175}.$

**8** Dacă $a = 5\sqrt{5} \cdot \sqrt{50} - \sqrt{250}$ și $b = \sqrt{1000}$, calculează suma și diferența numerelor reale $a$ și $b$.

**9** Arată că rezultatul calculului $x + y + z$ este număr întreg în fiecare dintre cazurile următoare:

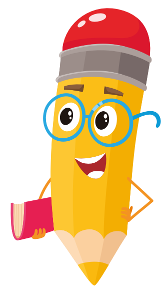
**a)** $x = 2\sqrt{5} - 5\sqrt{3},\ y = 7\sqrt{3} - 5\sqrt{5},\ z = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3};$ **b)** $x = 11 - \sqrt{2};\ y = 3\sqrt{2} - 7;\ z = 5 - 2\sqrt{2};$

**c)** $x = 3\sqrt{7} - 5\sqrt{2},\ y = -\sqrt{7} + \sqrt{2},\ z = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7}.$

**10** Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:

**a)** $3 - \sqrt{2} < 0;$ **b)** $\sqrt{17} - 4 > 0;$ **c)** $\sqrt{49} - 8 < 0;$

**d)** $5\sqrt{3} - 9 > 0;$ **e)** $4 - 3\sqrt{2} < 0;$ **f)** $4\sqrt{3} - 5 > 0.$



**11** Compară numerele $x$ și $y$, dacă:

**a)** $x = 2\sqrt{20}$ și $y = 3\sqrt{10};$ **b)** $x = -2\sqrt{250}$ și $y = -5\sqrt{40};$

**c)** $x = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$ și $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3};$ **d)** $x = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ și $y = -\dfrac{2}{5}\sqrt{2}.$

**12** Calculează suma și diferența numerelor reale pozitive $a$ și $b$, știind că $\sqrt{\left(\sqrt{12} - a\right)^2} + \sqrt{\left(b - \sqrt{48}\right)^2} \le 0.$

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Dacă $a = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ și $b = -7\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$, atunci $a + b = 0$. **A** **F**

**b)** Dacă $a = 3\sqrt{20} - 2\sqrt{45}$ și $b = 4\sqrt{80} - \sqrt{180}$, atunci $a - b = -10\sqrt{5}$. **A** **F**

**c)** Opusul numărului $4\sqrt{192} - 3\sqrt{432}$ este $12\sqrt{3}$. **A** **F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

**a)** $\sqrt{75} - \sqrt{108} + \sqrt{12}$ este egal cu … **1)** $2\sqrt{5};$

**b)** $3\sqrt{125} - 5\sqrt{45} + 4\sqrt{5} - 2\sqrt{20}$ este egal cu … **2)** $\sqrt{2};$

**c)** $3\sqrt{12} + 3\sqrt{20} - 2\sqrt{27} - \sqrt{80}$ este egal cu … **3)** $\sqrt{3};$

**d)** $-7\sqrt{18} + 2\sqrt{162} - 2\sqrt{432} + 4\sqrt{108}$ este egal cu … **4)** $0;$

**5)** $-3\sqrt{2}.$

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Rezultatul calculului $|4\sqrt{3} - 7| + |-2\sqrt{3} + 7| + 6\sqrt{3}$ este egal cu $\boxed{\phantom{000}}$.

# LECȚIA 3 Înmulțirea și împărțirea numerelor reale

## Rezolvăm împreună

Se știe că $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ și $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ (aproximări cu două zecimale exacte). Dacă $1{,}41 \cdot 1{,}73 = 2{,}4393$ și $1{,}42 \cdot 1{,}74 = 2{,}4708$, stabilește valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

**a)** 2,4393 este rezultatul calculului $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ cu patru zecimale exacte;

**b)** 2,4393 este rezultatul calculului $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ cu trei zecimale exacte;

**c)** 2,4393 este rezultatul calculului $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ cu două zecimale exacte;

**d)** 2,4393 este un rezultat aproximativ al calculului $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

***Rezolvare** (activitate frontală):*

Din $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ și $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ rezultă că $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ și $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ și $1{,}41 \cdot 1{,}73 < \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} < 1{,}42 \cdot 1{,}74$.

Rezultă că $2{,}4393 < \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} < 2{,}4708$, de unde obținem că $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 2{,}4$ (aproximare cu o zecimală exactă). Prin urmare, propozițiile a), b) și c) sunt false, iar propoziția d) este adevărată.

**Observații:**

**1.** Rezolvarea exercițiului anterior, prin care am calculat $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ cu o zecimală exactă, arată că operațiile cu numere reale iraționale se reduc la operații cu numere raționale reprezentate prin fracții zecimale finite, a căror efectuare este anevoioasă, și că rezultatul operațiilor cu numere reale iraționale aproximate prin numere raționale nu este exact. Rezultatul poate fi calculat cu oricât de multe zecimale exacte dorim. Pentru efectuarea calculelor, se aplică regulile de calcul studiate.

**2.** Pentru a înmulți, respectiv a împărți două numere reale, aplicăm regulile de calcul învățate la numere reale raționale.

| Exemple privind aplicarea unor reguli de calcul | | Reguli de calcul aplicate |
|---|---|---|
| $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ | ▶ | *produs de radicali:* $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, $a, b \geq 0$ |
| $0,(3) \cdot \sqrt{108} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{108} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 108} = \sqrt{\frac{1}{9} \cdot 108} = \sqrt{12}$ | ▶ | *introducerea factorului sub radical:* $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$, $a, b \geq 0$ |
| $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{15}{3}} = \sqrt{5}$ | ▶ | *cât de radicali:* $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $a \geq 0, b > 0$ |
| $\frac{12}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = {}^{\sqrt{6})}\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = \frac{12}{6}\sqrt{6} = 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$ | ▶ | *raționalizarea numitorului:* $\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$, $a \in \mathbb{R}, b \neq 0, c > 0$ |

Astfel, aproximarea rezultatului final cu numărul dorit de zecimale exacte devine mult mai ușoară. Utilizând calculatorul de buzunar, pentru exemplele de mai sus găsim:

$$\sqrt{6} = 2{,}449489\ldots;\ \sqrt{12} = 3{,}464101\ldots;\ \sqrt{5} = 2{,}236067\ldots;\ \sqrt{24} = 4{,}898979\ldots .$$

Prin urmare, în această lecție și în lecțiile care urmează, efectuăm operații cu numere reale, acordând atenția necesară proprietăților operațiilor și regulilor de calcul.

## Reține!

- **Produsul** a două numere reale, $a$ și $b$, este un număr real, notat $a \cdot b$ sau $ab$.
  - Operația prin care se obține produsul a două numere reale se numește **înmulțirea numerelor reale**.
  - **Înmulțirea numerelor reale are aceleași proprietăți ca și înmulțirea numerelor raționale.**
- **Câtul** dintre numărul real $a$ și numărul real nenul $b$ este un număr real, notat $a : b$ și definit astfel: $a : b = a \cdot b^{-1}$ (câtul dintre numărul real $a$ și numărul real nenul $b$ este produsul lui $a$ cu inversul lui $b$).
  - Operația prin care se obține câtul dintre două numere reale se numește **împărțirea numerelor reale**.
  - Se folosesc următoarele convenții de scriere: $a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a : b = \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.
- **Pentru efectuarea calculelor, se folosesc proprietățile înmulțirii și proprietățile radicalilor** (produs și cât de radicali, introducerea și scoaterea factorilor de sub radical și raționalizarea numitorului).
- **Înmulțirea și adunarea numerelor reale:**
  - Înmulțirea este distributivă față de adunare: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
  - Dacă în loc de $ab + ac$ se scrie $a(b + c)$, se spune că *a fost scos factor comun a*.
- Înmulțirea și împărțirea a două numere reale, dintre care cel puțin unul este irațional, se efectuează folosind aproximări ale celor două numere.
- Înmulțirea și împărțirea a două numere de forma $a\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, unde $n \neq k^2$, cu $k \in \mathbb{N}$, se efectuează fie folosind aproximări ale radicalilor, fie folosind regula:

$$b\sqrt{m} \cdot c\sqrt{p} = b \cdot c\sqrt{m \cdot p}.$$

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Calculează și scrie rezultatul sub forma $a + b\sqrt{c}$, unde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $c > 0$:

**a)** $\sqrt{5}\left(2\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$; **b)** $\left(\sqrt{7} + 2\sqrt{3}\right) \cdot 9\sqrt{7}$; **c)** $\left(\sqrt{3} - 4\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{3}$; **d)** $-5\sqrt{6}\left(\sqrt{11} - \sqrt{6}\right)$.

**Rezolvare** *(activitate pe grupe):*

**a)** $\sqrt{5}\left(2\sqrt{5} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{25} + \sqrt{10} = 10 + \sqrt{10}$;

**d)** $-5\sqrt{6}\left(\sqrt{11} - \sqrt{6}\right) = -5\sqrt{6} \cdot \sqrt{11} + 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = -5\sqrt{66} + 30 = 30 + (-5)\sqrt{66}$.

### Exercițiul 2

**a)** Calculează $-2\sqrt{7}\left(3\sqrt{7} - 2\sqrt{2}\right)$ și scrie rezultatul sub forma $a + \sqrt{b}$.

**b)** Știind că $\sqrt{224} = 14{,}966629\ldots$, calculează $-2\sqrt{7}\left(3\sqrt{7} - 2\sqrt{2}\right)$ cu o zecimală exactă.

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

**a)** $-2\sqrt{7}\left(3\sqrt{7} - 2\sqrt{2}\right) = -42 + \sqrt{224}$;

**b)** Din $\sqrt{224} = 14{,}966629\ldots$ rezultă că $14{,}96 < \sqrt{224} < 14{,}97$, de unde $14{,}96 - 42 < \sqrt{224} - 42 < 14{,}97 - 42$, din care rezultă că $-27{,}04 < \sqrt{224} - 42 < -27{,}03$.

Deoarece $-2\sqrt{7}\left(3\sqrt{7} - 2\sqrt{2}\right) = -42 + \sqrt{224}$, rezultă că $-2\sqrt{7}\left(3\sqrt{7} - 2\sqrt{2}\right) \approx -27{,}0$ (cu o zecimală exactă).

## Portofoliu

Proprietățile înmulțirii numerelor reale sunt foarte importante. Adaugă la portofoliul personal aceste proprietăți, însoțite de verificarea lor prin exemple proprii.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Calculează: **a)** $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$; **b)** $4\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}\cdot\sqrt{49}$; **c)** $6\sqrt{11}:2\sqrt{11}$; **d)** $108\sqrt{19}:36\sqrt{19}$.

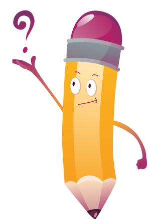
**2** Calculează: **a)** $\left(6\sqrt{12}\right):\left(3\sqrt{2}\right)$; **b)** $\left(-5\sqrt{24}\right):\left(10\sqrt{6}\right)$; **c)** $\left(27\sqrt{7}\right):\left(9\sqrt{63}\right)$;
**d)** $8:\left(5\sqrt{2}\right)$; **e)** $\left(-2\sqrt{10}\right):\left(5\sqrt{5}\right)$; **f)** $\left(8\sqrt{6}\right):\left(4\sqrt{2}\right)$.

**3** Calculează: **a)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}$; **b)** $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$;
**c)** $\sqrt{12}:\sqrt{3}+\sqrt{98}:\sqrt{2}$; **d)** $\sqrt{294}:\sqrt{2}:\sqrt{3}+\sqrt{243}:\sqrt{3}$.

**4** Calculează: **a)** $8\sqrt{17}:\left(2\sqrt{17}-10\sqrt{17}\right)$; **b)** $\left(3\sqrt{11}+4\sqrt{11}\right)\cdot\left(-2\sqrt{11}\right)$.

**5** Calculează $a\cdot(b+c)$ și $a\cdot(b-c)$, dacă: $a=2\sqrt{51}:\sqrt{17}+5\sqrt{33}:\sqrt{11}+2\cdot 5\sqrt{3}-8\sqrt{39}:\sqrt{13}$; $b=\sqrt{96}$;
$c=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)$.

**6** Calculează și stabilește care număr este rațional:
$a=7\cdot\sqrt{\dfrac{144}{49}}-5\cdot\sqrt{\dfrac{49}{25}}+\dfrac{4}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{16}}$ și $b=9\cdot\sqrt{\dfrac{16}{81}}-11\cdot\sqrt{\dfrac{100}{121}}+\dfrac{12}{5}\cdot\sqrt{\dfrac{25}{36}}$.



**7** Calculează $x\sqrt{2}\cdot y$, dacă:
**a)** $x=\sqrt{81}-\sqrt{64}-\sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{5}$ și $y=\sqrt{6^2+8^2}-\sqrt{3^4}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$;
**b)** $x=\sqrt{36}-\sqrt{25}-\sqrt{5^2-4^2}-\sqrt{98}+7\sqrt{2}$ și $y=3\sqrt{18}-2\sqrt{32}+\left(2\sqrt{20}-3\sqrt{45}\right):\left(5\sqrt{5}\right)$.

**8** Se consideră numerele reale $a$, $b$ și $c$, astfel încât $a\cdot b=10\sqrt{6}$ și $a\cdot c=-6\sqrt{6}$.
**a)** Calculează $a\cdot(b+c)$ și $a\cdot(b-c)$. **b)** Determină numărul $a$, știind că $b+c=4\sqrt{2}$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Dacă $a=\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{12}-4\sqrt{2}\right)-\sqrt{60}$ și $b=\sqrt{250}-8\sqrt{10}+\sqrt{90}$, atunci $a\cdot b=0$. **A** **F**

**b)** Dacă $a=3\cdot\left(2\sqrt{7}-4\sqrt{3}\right)-2\sqrt{63}$ și $b=2\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{75}$, atunci $a:b=-3\sqrt{3}$. **A** **F**

**c)** Dacă $|2x-\sqrt{18}|=\sqrt{50}$, atunci $x\in\left\{-\sqrt{2},4\sqrt{2}\right\}$. **A** **F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

**a)** $\sqrt{\dfrac{75}{99}}\cdot\dfrac{\sqrt{66}}{5\sqrt{2}}$ este egal cu …

**b)** $\sqrt{\dfrac{102}{29}}:\sqrt{1\dfrac{22}{29}}$ este egal cu …

**c)** $\dfrac{3\sqrt{41}}{\sqrt{156}}:\sqrt{\dfrac{369}{780}}$ este egal cu …

**d)** $2\sqrt{3}\cdot\left(4\sqrt{27}-\sqrt{75}\right)-\sqrt{49}$ este egal cu …

**1)** $\sqrt{2}$;
**2)** 35;
**3)** 1;
**4)** 0;
**5)** $\sqrt{5}$.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Suma dintre inversul numărului $\dfrac{1}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2}}$ și opusul numărului $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$ este egală cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 4 Puteri cu exponent număr întreg. Ordinea efectuării operațiilor

## Ne amintim

- definiția puterii cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul;
- reguli de calcul cu puteri;
- ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor în mulțimea numerelor raționale.

## Rezolvăm împreună

**a)** Scrie $\left(\sqrt{2}\right)^3$ ca o înmulțire repetată.

**b)** Determină numărul a cărui rădăcină pătrată este $\left(\sqrt{2}\right)^3$.

**c)** Știind că $\sqrt{2}$ = 1,414213…, calculează $\left(\sqrt{2}\right)^3$ cu o zecimală exactă.


***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** $\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)$.

**b)** Deoarece produs de radicali este egal cu radical din produs, rezultă: $\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2\cdot2\cdot2}=\sqrt{8}$.

Notăm cu *p* pătratul numărului $\left(\sqrt{2}\right)^3$. Rezultă că $\sqrt{p}=\left(\sqrt{2}\right)^3=\sqrt{8}$, adică numărul este 8.

**c)** Deoarece $\left(\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2\cdot2}=\sqrt{4}=2$, folosind punctul a), rezultă că $\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}$. Folosind aproximările prin lipsă și adaos ale numărului $\sqrt{2}$, rezultă că 1,41 < $\sqrt{2}$ < 1,42, iar prin înmulțire cu 2 rezultă că 2,82 < $2\sqrt{2}$ < 2,84.

Prin urmare, $\left(\sqrt{2}\right)^3\approx2{,}8$ (aproximare cu o zecimală exactă).

## Reține!

- Regulile de calcul cu puteri cu exponent întreg, învățate la numerele raționale, se păstrează și pe mulțimea numerelor reale.
- Dacă $a\in\mathbb{R}$, cu $a\geq0$ și $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n}$.
- Dacă $a\in\mathbb{R}$, cu $a\geq0$, atunci $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.
- Dacă $a\in\mathbb{R}$, cu $a>0$ și $n\in\mathbb{N}$, atunci:
$$\left(\sqrt{a}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\sqrt{a}\right)^n}.$$
- Dacă $a, x\in\mathbb{R}$, cu $a\geq0$ și $n\in\mathbb{N}^*$, atunci:
$$\left(x\sqrt{a}\right)^n=x^n\left(\sqrt{a}\right)^n.$$

## Aplicăm cunoștințele

Calculează și scrie rezultatul sub forma $a\sqrt{b}$, unde *a* este număr rațional, iar *b* este un număr natural care nu este divizibil cu niciun pătrat perfect.

**a)** $\left(\sqrt{5}\right)^4\cdot\left(\sqrt{5}\right)^3$; **b)** $\left[\left(\sqrt{11}\right)^2\right]^3$; **c)** $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\right)^{-5}$; **d)** $\left(\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}\right)^7$.

***Rezolvare*** *(activitate pe grupe):* **a)** $\left(\sqrt{5}\right)^4\cdot\left(\sqrt{5}\right)^3=\left(\sqrt{5}\right)^7=\sqrt{5^7}=\sqrt{5^6\cdot5}=\sqrt{(5^3)^2\cdot5}=5^3\sqrt{5}=125\sqrt{5}$;

**b)** $\left[\left(\sqrt{11}\right)^2\right]^3=\left(\sqrt{11}\right)^6=\sqrt{11^6}=\sqrt{(11^3)^2}=11^3=11^3\sqrt{1}$ sau, mai simplu: $\left[\left(\sqrt{11}\right)^2\right]^3=11^3=11^3\sqrt{1}$;

**c)** $\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\right)^{-5}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\right)^5}=\dfrac{1}{36\sqrt{6}}=\dfrac{1\cdot\sqrt{6}}{36\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{36\cdot6}=\dfrac{1}{216}\cdot\sqrt{6}$; **d)** $\left(\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}\right)^7=\left(\sqrt{\dfrac{12}{3}}\right)^7=\left(\sqrt{4}\right)^7=2^7=2^7\sqrt{1}$.

## Reține!

**Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor**

Ca și în cazul numerelor raționale:

- într-un șir de operații cu numere reale, se efectuează mai întâi ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile în ordinea în care apar și după aceea se efectuează adunările și scăderile în ordinea în care apar;
- în exercițiile de calcul cu paranteze, se efectuează mai întâi calculele din parantezele mici (rotunde), apoi cele din parantezele mari (pătrate) și după aceea calculele din acolade.

## Aplicăm cunoștințele

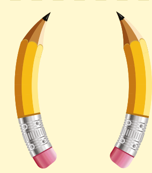
Calculează, respectând ordinea efectuării operațiilor:

$$\frac{\sqrt{6}}{2}:\left(\sqrt{384}-4\sqrt{6}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\cdot\left(\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}:\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\sqrt{3^2\cdot 4^2}-\sqrt{3^2+4^2}\right)+\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^{-2}.$$

***Rezolvare** (activitate frontală):* $\frac{\sqrt{6}}{2}:\left(8\sqrt{6}-4\sqrt{6}\right)+\frac{1}{\cancel{3\sqrt{3}}_{\,1}}\left(\frac{\cancel{3\sqrt{3}}^{\,1}}{2\cancel{\sqrt{2}}_{\,1}}\cdot\cancel{\sqrt{2}}^{\,1}\right)-(3\cdot 4-5)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2=$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}:4\sqrt{6}+\frac{1}{2}-7+\frac{3}{8}=\frac{\cancel{\sqrt{6}}^{\,1}}{2}\cdot\frac{1}{4\cancel{\sqrt{6}}_{\,1}}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-7=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-7=\frac{^{4)}4}{8}+\frac{1}{2}-7=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-7=1-7=-6.$$

## Portofoliu



- Descrie ordinea efectuării operațiilor cu numere reale.
- Rezolvă cinci exerciții în care să aplici ordinea efectuării operațiilor.
- Descrie modul de folosire a parantezelor în operațiile cu numere reale.
- Rezolvă cinci exerciții în care să aplici modul de folosire a parantezelor în operațiile cu numere reale.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Calculează: **a)** $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; **b)** $\left(-3\sqrt{2}\right)^2$; **c)** $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)^3$; **d)** $\left(-2\sqrt{5}\right)^3$; **e)** $\sqrt{27^2}$.

**2** Calculează: **a)** $\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3$; **b)** $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{10}}{\left(\sqrt{3}\right)^8}$; **c)** $\left[\left(\sqrt{5}\right)^2\right]^3$; **d)** $\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2$; **e)** $\left(\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}\right)^2$.

**3** Calculează $a+b-c$, pentru:

**a)** $a=2\sqrt{3}-5,\ b=3\sqrt{2}-2\sqrt{3},\ c=-5+3\sqrt{2}$; **b)** $a=2-\sqrt{5},\ b=-4\sqrt{7}+2\sqrt{5},\ c=\sqrt{5}-4\sqrt{7}$.

**4** Calculează:

**a)** $12\sqrt{6}:2\sqrt{3}$; **b)** $-20\sqrt{27}:4\sqrt{9}$; **c)** $72\sqrt{63}:\left(-4\sqrt{7}\right):\left(-\sqrt{3}\right)$.

**5** Calculează:

**a)** $\left(-2\sqrt{6}\right)^2$; **b)** $\left(\frac{1}{5}\cdot\sqrt{10}\right)^2$; **c)** $\left(\frac{7}{\sqrt{7}}\right)^2$; **d)** $\left(\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2$.

**6** Calculează în două moduri:

**a)** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{6}-\left(\frac{2}{\sqrt{12}}-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt{24}-6$; **b)** $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{10}+\left(\frac{5}{\sqrt{10}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt{50}$.

**7** Calculează:

a) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{14}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{21}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$;  b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$.

**8** Calculează:

a) $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{75}\right)^3:\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$;  b) $\left(\sqrt{3}\right)^{10}:\left(-\sqrt{3}\right)^7-3\left(\sqrt{3}\right)^{12}:\left(-\sqrt{3}\right)^9$.

**9** Se consideră numerele $a=4\sqrt{2}-\sqrt{32}+\sqrt{128}$ și $b=5\sqrt{3}+\sqrt{27}-6\sqrt{12}$. Calculează:
a) $a-b$;  b) $a\cdot b$;  c) $a:b$;  d) $a^2+b^2$.

**10** Calculează:

a) $\sqrt{\dfrac{432}{18}}-7\cdot\sqrt{\dfrac{27}{98}}-\sqrt{\dfrac{48}{288}}$;  b) $\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^3\cdot\sqrt{3}+\left(5\sqrt{2}\right)^2:\left(\sqrt{5}\right)^2$;

c) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{18}}+\dfrac{8}{\sqrt{32}}+\dfrac{6}{\sqrt{72}}\right)^2:\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^{-2}$;  d) $70\cdot\sqrt{\dfrac{8}{25}}+0{,}5\cdot\sqrt{32}-\sqrt{0{,}72}\cdot\left(5\sqrt{2}\right)^2$.

**11** Dacă $a=0{,}1(6)+\sqrt{0{,}36}+1\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{0{,}09}$, calculează $\sqrt{1\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{a}}$.

**12** Efectuează calculele:

a) $2\sqrt{3}-\sqrt{12}+2\sqrt{27}-\sqrt{48}+\sqrt{75}$;  b) $(-0{,}2)^3\cdot(-5)^2-\dfrac{1}{5}\cdot\sqrt{0{,}0025}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{11}}+\dfrac{\sqrt{11}}{100}\right)\cdot 11\sqrt{11}$.

**13** Se consideră numerele $x=2\sqrt{3}$ și $y=\sqrt{18}-5\sqrt{3}$.

a) Calculează produsul numerelor $x$ și $y$ și scrie rezultatul sub forma $a+b\sqrt{c}$.

b) Știind că $\sqrt{6}=2{,}44948\ldots$, aproximează la zecimi prin lipsă rezultatul calculului $2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{18}-5\sqrt{3}\right)$.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

a) Dacă $x=2\sqrt{150}-\sqrt{216}$, atunci $x^2=48$.  A F

b) Dacă $x=4\sqrt{245}-3\sqrt{500}$, atunci $x^3=-40\sqrt{5}$.  A F

c) Modulul numărului $\left(-4\sqrt{2}\right)^3+\sqrt{128}+4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^3$ este numărul $128\sqrt{2}$.  A F

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

| | |
|---|---|
| a) $\sqrt{12^2}+\sqrt{5^2}$ este egal cu … | 1) $-22$; |
| b) $\sqrt{12^2+5^2}$ este egal cu … | 2) $-2$; |
| c) $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)^4+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}}\right)^{-2}$ este egal cu … | 3) 13; |
| d) $\left(\sqrt{5}\right)^{10}:\left(\sqrt{5}\right)^8-\left[\left(\sqrt{3}\right)^3\right]^2$ este egal cu … | 4) 17; |
| | 5) 42. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Rezultatul calculului $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{18}-\sqrt{50}\right)^3:\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3}$ este egal cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# EVALUAREA UNITĂȚII DE ÎNVĂȚARE

## TEST

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.**

(5p) **1.** Opusul numărului $2-\sqrt{3}$ este numărul $\dots$.

(5p) **2.** Inversul numărului $\dfrac{1}{\sqrt{(2\sqrt{6}-5)^2}}$ este numărul $\dots$.

(5p) **3.** Suma numerelor $x=\sqrt{28}$ și $y=-3\sqrt{7}$ este egală cu $\dots$.

(5p) **4.** Produsul numerelor $a=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ și $b=\dfrac{10}{\sqrt{5}}$ este egal cu $\dots$.

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu rezultatul corespunzător din coloana B.**

**A**

(5p) **1.** $\left(\dfrac{24}{\sqrt{48}}+\dfrac{45}{\sqrt{75}}-\dfrac{48}{\sqrt{192}}\right)^2$ este egal cu $\dots$

(5p) **2.** $3\cdot\left(\dfrac{45}{5\sqrt{3}}-\dfrac{12}{2\sqrt{3}}+\dfrac{21}{3\sqrt{3}}\right)-\left(\dfrac{24}{\sqrt{3}}+\dfrac{10}{\sqrt{12}}-\dfrac{6}{\sqrt{27}}\right)$ este egal cu $\dots$

(5p) **3.** $\left(\dfrac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}+\dfrac{18}{2\sqrt{6}}-\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ este egal cu $\dots$

(5p) **4.** $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}-\dfrac{5}{10\sqrt{5}}+\dfrac{4}{3\sqrt{5}}\right):\left(\dfrac{30}{\sqrt{10}}+\dfrac{\sqrt{10}}{30}-\dfrac{31}{3\sqrt{10}}\right)\cdot\sqrt{2}$ este egal cu $\dots$

**B**

**a)** 0,25;

**b)** $2\sqrt{10}$;

**c)** $\sqrt{3}$;

**d)** 4,1(6);

**e)** 27.

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{10^{10}+10^{10}+10^{11}}:\sqrt{5^{10}+5^{10}+5^{11}+5^{11}}$ este egal cu:

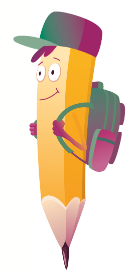
**A.** $2^{10}$; **B.** $3\cdot 2^{10}$; **C.** 32; **D.** $5\cdot 2^{10}$.

(5p) **2.** Dacă $a=4\sqrt{6}:\sqrt{3}-2\cdot\left(1+2\sqrt{2}\right)$, atunci $1+a^{-1}+a^{-2}$ este egal cu:

**A.** 0,25; **B.** 0,50; **C.** 0,75; **D.** $2\sqrt{2}$.

(5p) **3.** Rezultatul calculului $\left(\dfrac{|\sqrt{3}-1|}{2}+\dfrac{|\sqrt{3}-2|}{2}+\dfrac{|\sqrt{12}-4|}{2}\right):\dfrac{5-2\sqrt{3}}{4}$ este egal cu:

**A.** 2; **B.** 4; **C.** $2\sqrt{3}$; **D.** $3\sqrt{2}$.



(5p) **4.** Dacă $a=2\sqrt{847}-\sqrt{648}+9\sqrt{8}-\sqrt{567}$ și $b=\sqrt{800}+50\sqrt{5}-4\sqrt{50}-25\sqrt{20}$, atunci $a^b$ este egal cu:

**A.** $4\sqrt{5}$; **B.** $13\sqrt{7}$; **C.** 0; **D.** 1.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

**IV.** Se consideră numerele reale $a=\sqrt{10}\cdot\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)+|3\sqrt{2}-6|$ și $b=2+\dfrac{10}{\sqrt{5}}+\left(\sqrt{3}\right)^2$.

(15p) **a)** Arată că $a=2\sqrt{5}+6$. **b)** Calculează $(a-b)^{2024}$. **c)** Arată că $a-\left(\sqrt{20}+2\right)$ este pătrat perfect.

**V.** Se consideră numerele reale $a=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{27}+...+\sqrt{300}}{\sqrt{7}+\sqrt{28}+\sqrt{63}+...+\sqrt{700}}$, $b=\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+...+\sqrt{2\cdot 99^2}$ și $c=\sqrt{968}$. Arată că:

(15p) **a)** $a\cdot\sqrt{21}$ este număr natural; **b)** $\dfrac{15}{22\sqrt{2}}\cdot b$ este un cub perfect; **c)** $b\cdot c^{-1}$ este pătrat perfect.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

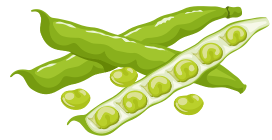
| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **Nota** | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# UNITATEA: OPERAȚII CU NUMERE REALE ÎN SITUAȚII PRACTICE

## LECȚIA 1 Media aritmetică ponderată a *n* numere reale, $n \geq 2$

### Rezolvăm împreună

Mihaela a cumpărat de la piață 1 kg de mazăre, pentru care a plătit 4,20 de lei, și un 1 kg de fasole, pentru care a plătit 5,80 de lei. Cât a plătit Mihaela pentru un kilogram de legume?



***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Raționamentul este următorul:

– pentru 2 kg de legume, Mihaela a plătit: 4,20 lei + 5,80 lei = 10 lei;

– pentru 1 kg de legume, Mihaela a plătit: 10 lei : 2 = 5 lei.

**Observație:** Notând cu *m* valoarea exprimată în lei a prețului pe kilogramul de legume, rezultă:

$$m = \frac{5{,}80 + 4{,}20}{2} = 5.$$

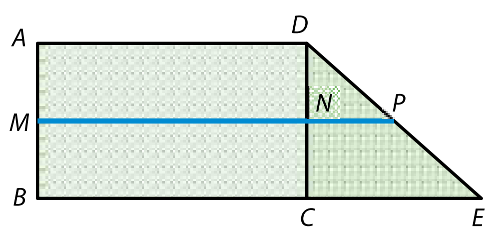
Spunem că 5 este media aritmetică a numerelor 5,80 și 4,20.

### Reține!

- Se numește **media aritmetică** a numerelor reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ raportul dintre suma numerelor și numărul acestora. Se notează cu $m_a$ și $m_a = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.
- Se numește **media aritmetică ponderată** a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, numărul notat cu $m_p$ și definit de egalitatea: $m_p = \dfrac{p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_n \cdot a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$.
- Media aritmetică a două sau mai multor numere reale este cel puțin egală cu cel mai mic dintre numere și cel mult egală cu cel mai mare dintre acestea, adică: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n \Rightarrow a_1 < m_a < a_n$ $(n \geq 2)$.

### Aplicăm cunoștințele

Prin utilizarea unor instrumente topografice, au fost măsurate unghiurile și distanțele unui teren împădurit și s-a întocmit schița alăturată, la scara 1:100. S-a stabilit că suprafața *ABCD* este un dreptunghi, iar suprafața *CDE* este un triunghi dreptunghic cu ipotenuza *DE*. Pe schiță, unde *AB* = 2 cm, *BD* = 4 cm, *DE* = 3 cm și *CE* = 2*NP*, sunt marcate punctele coliniare *M*, *N* și *P*, care sunt mijloacele segmentelor *AB*, *DC*, respectiv *DE*.




**a)** Din motive practice, de accesibilitate, prin punctele *M*, *N*, *P* trebuie construit un drum forestier. Arată că lungimea acestui drum este egală cu media aritmetică a lungimilor drumurilor *AD* și *BE* ($C \in BE$).

**b)** Știind că $\sqrt{120000} = 346{,}41016\ldots$, $\sqrt{12500} = 111{,}80339\ldots$ și că un metru liniar de drum forestier costă 800 de lei, estimează costul drumului.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Folosim schița topografică. Deoarece *BC* = *AD* și *CE* = 2*NP*, din *BE* = *BC* + *CE* rezultă că *BE* = *AD* + 2*NP*. Ținând cont că *AD* = *MN* și calculând media aritmetică a lungimilor segmentelor *AD* și *BE*, rezultă că: $\dfrac{AD + BE}{2} = \dfrac{AD + AD + 2NP}{2} = AD + NP = MN + NP = MP$.

**Știai că...**

**Topografia** este o știință care se ocupă cu efectuarea de măsurători asupra unor suprafețe de teren și forme de relief, cu studiul metodelor de măsurat, precum și cu analiza instrumentarului și aparaturii necesare desfășurării activităților. Rezultatele măsurătorilor topografice se concretizează în întocmirea hărților și planurilor topografice, la diferite scări.

Din egalitatea: $\frac{AD+BE}{2}=MP$ rezultă că lungimea drumului *MP* este egală cu media aritmetică a lungimilor drumurilor *AD* și *BE*.

**b)** Folosindu-ne de schița topografică, calculăm lungimile unor segmente. Acestea sunt exprimate în centimetri. Deoarece *ABCD* este dreptunghi, rezultă că *CD* = *AB* = 2 cm. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic *CBD*, calculăm: $BD^2 = DC^2 + BC^2$, adică $BC^2 = BD^2 - DC^2$ și $BC = \sqrt{BD^2-DC^2}=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$. Rezultă că $AD = BC = 2\sqrt{3}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul *CDE*, calculăm: $CE^2 = DE^2 - CD^2$ și obținem: $CE=\sqrt{DE^2-CD^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$. Rezultă că $BE = BC + CE = 2\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Conform punctului anterior, $MP=\frac{AD+BE}{2}$, adică $MP=\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}=\frac{4\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{3}+0,5\sqrt{5}$.

Deoarece schița topografică a fost realizată la scara 1:100, rezultă că lungimea în teren a drumului *MP*, exprimată în metri, va fi de o sută de ori mai mare decât cea din schiță. Rezultă că:

$$MP=100\cdot\left(2\sqrt{3}+0,5\sqrt{5}\right)=200\sqrt{3}+50\sqrt{5}=\sqrt{120000}+\sqrt{12500}.$$

Din punct de vedere practic, acest rezultat exact al lungimii drumului forestier nu este folositor. Având în vedere că o sutime dintr-un metru reprezintă un centimetru, calculul lungimii drumului este suficient de precis dacă estimăm lungimea acestuia la sutimi. Din $346,41<\sqrt{120000}<346,42$ și $111,80<\sqrt{12500}<111,81$ rezultă că $346,41+111,80<\sqrt{120000}+\sqrt{12500}<346,42+111,81$, de unde: $458,21<\sqrt{120000}+\sqrt{12500}<458,23$. Prin urmare, lungimea drumului *MP* este mai mare decât 458,21 m și mai mică decât 458,23 m. Deoarece $800\cdot 458,21 = 366568$ și $800\cdot 458,23 = 366584$, rezultă că drumul forestier costă *cel puțin* 366568 de lei, dar nu *mai mult* de 366584 de lei.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** **a)** Suma a trei numere este $\sqrt{27}$. Calculează media lor aritmetică.

**b)** Media aritmetică a trei numere este $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Calculează suma numerelor.

**2** Calculează media aritmetică a numerelor reale *x*, *y* și *z*, știind că:

**a)** $x=2\sqrt{5}-5\sqrt{3},\ y=7\sqrt{3}-5\sqrt{5},\ z=3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$; **b)** $x=11-\sqrt{2},\ y=3\sqrt{2}-7,\ z=5-2\sqrt{2}$.

**3** Calculează media ponderată a numerelor:

**a)** 1,(3) și $3\frac{1}{3}$, cu ponderile 3, respectiv 6; **b)** $\frac{1}{2}$, 1,3(8) și 0,(3), cu ponderile 1, 9, respectiv 6.

**4** Calculează media ponderată a numerelor $x=\sqrt{8}-\sqrt{12}$ și $y=\sqrt{18}+\sqrt{27}$, cu ponderile $2^{-1}$ și $3^{-1}$.

**5** Știind că $\sqrt{y}$ este media aritmetică a numerelor *x* și *z*, cu *x* < *z*, scrie numerele *x*, $\sqrt{y}$ și *z* în ordine descrescătoare.

**6** Media aritmetică a trei numere raționale pozitive este $\frac{17}{36}$. Suma a două dintre ele este $\frac{7}{12}$. Calculează celălalt număr.

**7** Media aritmetică a trei numere este $37\frac{1}{3}$, iar media aritmetică a ultimelor două numere este 54. Determină numerele, știind că al treilea este cu 44 mai mare decât al doilea.

**8** Șerban a cumpărat pentru o petrecere 2 kg de bomboane cu 3 lei kilogramul, 3 kg de bomboane cu 7 lei kilogramul și 1 kg de bomboane cu 9 lei kilogramul. Câți lei costă în medie un kilogram de bomboane?

**9** S-a recoltat floarea-soarelui de pe trei parcele după cum urmează: de pe prima parcelă s-au strâns câte 4000 kg la hectar, de pe a doua, câte 3800 kg la hectar, iar de pe a treia, câte 4600 kg la hectar. Prima parcelă are o suprafață de 5 ha, a doua are o suprafață de 3 ha și a treia are o suprafață de 10 ha. Câte kilograme de floarea-soarelui s-au strâns în medie la hectar?

**10** Media aritmetică a două numere raționale pozitive este 0,75 și un al treilea număr este 1,5. Calculează media aritmetică a celor trei numere.

**11** Media aritmetică a numerelor $a$ și $b$ este $\frac{27}{10}$, media aritmetică a numerelor $b$ și $c$ este $\frac{23}{10}$, iar media aritmetică a numerelor $a$ și $c$ este 1.

**a)** Calculează media aritmetică a numerelor $a$, $b$ și $c$.

**b)** Cu cât se modifică media aritmetică a numerelor $a$, $b$ și $c$, dacă la fiecare se mai adaugă 6?

**12** Un fermier sortează legumele produse astfel: 60 kg de legume de calitatea I și 40 kg de legume de calitatea a II-a. Prețul legumelor pe piață este de 4,60 de lei kilogramul pentru legumele de calitatea I și de 3,60 de lei kilogramul pentru legumele de calitatea a II-a. Fermierul se gândește că, dacă ar amesteca legumele și le-ar vinde cu prețul mediu de $\frac{4,60+3,60}{2}=4,10$ lei kilogramul, suma de bani rezultată din vânzare ar fi aceeași.

**a)** Efectuează calculele și verifică dacă fermierul are dreptate.

**b)** Calculează pierderea suferită de fermier.

**c)** Calculează prețul mediu corect pentru kilogramul de legume rezultat prin amestecarea celor două sortimente de legume.

**d)** Precizează situația în care prețul mediu stabilit de fermier ar fi putut aduce acestuia o sumă de bani în plus.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Media aritmetică ponderată a numerelor raționale 3 și 2,(3), cu ponderile 4, respectiv 6, este $m_p = 2,6$. **A F**

**b)** Media aritmetică a numerelor reale $2\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$ și $7\sqrt{5}$ este $m_a = 4\sqrt{5}$. **A F**

**c)** Media aritmetică ponderată a numerelor reale $2\sqrt{6}$ și $3\sqrt{6}$, cu ponderile $\frac{1}{2}$, respectiv $\frac{1}{3}$, este $m_p = 2,4\sqrt{6}$. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

**a)** Media aritmetică ponderată a numerelor reale $\sqrt{180}$ și $3\sqrt{80}$, cu ponderile 2, respectiv 6, este egală cu …

**b)** Media aritmetică ponderată a numerelor reale $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{45}$ și $5\sqrt{5}$, cu ponderile 1, 2, respectiv 7, este egală cu …

**c)** Dacă media aritmetică ponderată a numerelor $\sqrt{18}$ și $2\sqrt{32}$, cu ponderile 2, respectiv $a$, este egală cu $6\sqrt{2}$, atunci $a$ este egal cu …

**d)** Media aritmetică a numerelor reale $(7\sqrt{2}-3)$ și $(3\sqrt{2}+1)$ este egală cu …

**1)** 3;

**2)** $10,5\sqrt{5}$;

**3)** $5\sqrt{2}-1$;

**4)** $5\sqrt{5}$;

**5)** $5\sqrt{2}$.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Media aritmetică a trei numere reale este egală cu $5\sqrt{3}$. Dacă media aritmetică a două dintre numere este egală cu $6\sqrt{3}$, atunci diferența dintre cel de-al treilea număr și $3\sqrt{3}$ este egală cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 2 Media geometrică a două numere reale pozitive

## Ne amintim

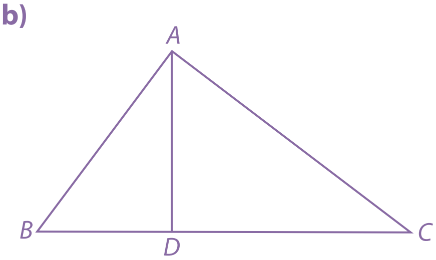
- proprietatea fundamentală a proporției;
- teorema lui Pitagora.

## Rezolvăm împreună

**a)** Desenează un triunghi dreptunghic *ABC*, cu catetele $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm.
**b)** Construiește înălțimea *AD* a triunghiului *ABC*.
**c)** Măsoară lungimea segmentului *BC*.
**d)** Se notează cu *x* lungimea (exprimată în centimetri) a segmentului *AD*. Știind că $BD = 1{,}8$ cm, $CD = 3{,}2$ cm și că numerele 1,8 și *x* sunt direct proporționale cu numerele *x* și 3,2, calculează *x*.
**e)** Verifică rezultatul prin măsurare.

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

**a), b)**




**d)** Deoarece numerele 1,8 și *x* sunt direct proporționale cu numerele *x* și 3,2, rezultă proporția $\frac{1{,}8}{x} = \frac{x}{3{,}2}$. Cum într-o proporție *produsul mezilor este egal cu produsul extremilor,* rezultă succesiv:

$$x \cdot x = 1{,}8 \cdot 3{,}2;\ x^2 = 5{,}76;\ x = \sqrt{5{,}76};\ x = 2{,}4.$$

Prin urmare, lungimea segmentului *AD* este de 2,4 cm, ceea ce corespunde cu rezultatul obținut prin măsurare.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Deoarece numerele 1,8 și *x* sunt proporționale cu numerele *x* și 3,2, se spune despre *x* că este ***media proporțională*** a numerelor 1,8 și 3,2 sau că *x* este ***media geometrică*** a numerelor 1,8 și 3,2. În acest caz, $x = \sqrt{1{,}8 \cdot 3{,}2}$.

La geometrie vom demonstra că: oricare ar fi un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este media proporțională sau media geometrică a lungimilor segmentelor determinate de înălțime pe ipotenuză.

### Reține!

- Dacă *a* și *b* sunt două numere reale pozitive, atunci **media geometrică** sau **media proporțională** a numerelor *a* și *b* este numărul pozitiv $m_g = \sqrt{a \cdot b}$.
- Media geometrică a două numere reale pozitive, *a* și *b*, cu $a < b$, este cel puțin egală cu cel mai mic dintre numere și cel mult egală cu cel mai mare dintre numere, adică: $0 < a < b \Rightarrow a \le m_g \le b$.
- Media geometrică a două numere reale pozitive, *a* și *b*, este mai mică sau egală cu media aritmetică a numerelor reale pozitive *a* și *b*, adică: $a > 0,\ b > 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.
- Dacă *a* și *b* sunt numere reale pozitive, atunci media geometrică este egală cu media aritmetică dacă și numai dacă cele două numere sunt egale, adică: $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b$.

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Copiază, calculează și completează tabelul următor, unde $m_a = \dfrac{a+b}{2}$, respectiv $m_g = \sqrt{ab}$ reprezintă media aritmetică, respectiv media geometrică ale numerelor reale *a* și *b*.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ***a*** | 12 | 0,6 | $\frac{2}{3}$ | ? | ? | $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ |
| ***b*** | 48 | 9,6 | ? | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{5}}{5}$ | $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ |
| $m_a$ | ? | ? | $\frac{13}{12}$ | $\sqrt{3}$ | ? | ? |
| $m_g$ | ? | ? | ? | ? | 1 | ? |

### Exercițiul 2

Se consideră numerele reale: $a = \left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)$ și $b = \left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)$.

**a)** Arată că produsul $a \cdot b$ este număr natural.

**b)** Calculează media geometrică a numerelor *a* și *b*.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** $a \cdot b = \left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)$.

Aplicând asociativitatea și comutativitatea înmulțirii, grupând factorii produsului $a \cdot b$ și ținând cont de schema de mai sus, rezultă: $a \cdot b = \left[\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\right]\cdot\left[\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\right]$.

Introducem următoarele notații: $x = \sqrt{7}-\sqrt{5}$; $y = \sqrt{7}+\sqrt{5}$; $z = \sqrt{11}+\sqrt{3}$; $t = \sqrt{11}-\sqrt{3}$.
Atunci $a \cdot b = (xy) \cdot (zt)$. Calculăm *xy* și apoi *zt*.

**Calculul lui *xy*:** $xy = x\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right) = x\sqrt{7}+x\sqrt{5} = \left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\sqrt{5} =$
$= \sqrt{7}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5} = 7-\sqrt{35}+\sqrt{35}-5 = 2.$

**Calculul lui *zt*:** $zt = z\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right) = z\sqrt{11}-z\sqrt{3} = \left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)\sqrt{11}-\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)\sqrt{3} =$
$= \sqrt{11}\cdot\sqrt{11}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}-\sqrt{11}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 11+\sqrt{33}-\sqrt{33}-3 = 8.$

Deci, $a \cdot b = 2 \cdot 8 = 16$ și 16 este număr natural.

**b)** Media geometrică este $m_g = \sqrt{a\cdot b} = \sqrt{2\cdot 8} = \sqrt{16} = 4$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Calculează media geometrică a numerelor: **a)** 8 și 32; **b)** $2\sqrt{2}$ și $3\sqrt{18}$.

**2** **a)** Media geometrică a două numere este 12, iar unul dintre numere este 9. Calculează celălalt număr.
**b)** Două numere naturale au media aritmetică 14,5 și media geometrică 10. Calculează numerele.

**3** Calculează media aritmetică, media geometrică și compară media aritmetică cu media geometrică în fiecare dintre următoarele cazuri:

**a)** $\frac{1}{27}$ și $\frac{1}{75}$; **b)** 18 și 50; **c)** 0,9 și 2,5; **d)** 6,25 și 100.

**4** **a)** Media geometrică a numerelor $4^x$ și $8^y$ este 64. Determină numerele naturale $x$ și $y$ cu această proprietate.
**b)** Media geometrică a două numere naturale este 21, iar cel mai mare divizor comun al lor este 3. Calculează numerele.

**5** Calculează media proporțională a numerelor:

**a)** 32 și 50; **b)** $\frac{2}{11}$ și $\frac{11}{18}$; **c)** 0,02 și 0,08.

**6** Calculează media geometrică a numerelor:

**a)** $\sqrt{72}$ și $\sqrt{18}$; **b)** $6\sqrt{6}$ și $9\sqrt{6}$; **c)** 11 și $2\frac{3}{11}$.

**7** Determină toate perechile de numere naturale a căror medie proporțională este egală cu:
**a)** 15; **b)** 6; **c)** 10.

**8** Calculează media proporțională a numerelor:

**a)** $9\sqrt{7}$ și $\sqrt{63}$; **b)** $6\sqrt{2}$ și $\sqrt{18}$; **c)** $14\sqrt{2}$ și $7\sqrt{2}$.

**9** Calculează media geometrică a numerelor:

**a)** $x = 12$ și $y = 3$; **b)** $x = 2,25$ și $y = 36$; **c)** $x = \frac{4}{3}$ și $y = 3$;

**d)** $x = 1,(5)$ și $y = 3,5$; **e)** $x = 165$ și $y = 1,4(6)$; **f)** $x = \sqrt{252}$ și $y = \sqrt{1575}$.

**10** Determină $x \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, din egalitățile:

**a)** $\frac{9}{x} = \frac{x}{49}$; **b)** $\frac{x}{1,21} = \frac{2,25}{x}$; **c)** $\frac{2\sqrt{3}}{x} = \frac{x}{8\sqrt{3}}$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Media geometrică a două numere reale pozitive este egală cu 6. Dacă unul dintre numere este $3\sqrt{2}$, atunci celălalt număr este $6\sqrt{2}$. **A** **F**

**b)** Media geometrică a numerelor reale 11,(6) și 1,8 este $m_g = 21$. **A** **F**

**c)** Media geometrică a numerelor reale $\frac{12}{\sqrt{3}}$ și $\frac{14}{\sqrt{3}}$ este $m_g = 2\sqrt{14}$. **A** **F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Se consideră numerele $a = 32\sqrt{3}$ și $b = 2\sqrt{3}$.

**a)** Media aritmetică a numerelor $a$ și $b$ este egală cu … **1)** $14\sqrt{3}$;

**b)** Media aritmetică ponderată, cu ponderile 2, respectiv 3, a numerelor $a$ și $b$ este egală cu … **2)** $9\sqrt{3}$;

**3)** $8\sqrt{3}$;

**c)** Media geometrică a numerelor $a$ și $b$ este egală cu … **4)** $17\sqrt{3}$;

**d)** Diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor $a$ și $b$ este egală cu … **5)** $7\sqrt{3}$.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Dacă $a = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ și $b = \frac{10}{\sqrt{32}} - \frac{1}{\sqrt{8}}$, atunci produsul celor două numere este egal cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 3 Ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$

## Rezolvăm împreună

Folosind proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare, demonstrează că, oricare ar fi numerele reale $a$ și $b$, are loc egalitatea:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

**Ne amintim**

- ecuație, soluția și mulțimea soluțiilor unei ecuații, ecuații echivalente;
- operații cu numere reale;
- rădăcina pătrată a unui număr real nenegativ;
- modulul unui număr real.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Pentru a calcula $(a - b)(a + b)$, notăm $a - b = m$ și aplicăm *distributivitatea înmulțirii față de adunare*:

$$(a - b)(a + b) = m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b.$$

Pentru a calcula $m \cdot a + m \cdot b$, înlocuim $m$ cu $a - b$ și aplicăm proprietatea de *comutativitate* și proprietatea de *distributivitate a înmulțirii față de scădere*:

$$m \cdot a + m \cdot b = (a - b) \cdot a + (a - b) \cdot b = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Deoarece $(a - b)(a + b) = m \cdot a + m \cdot b$ și $m \cdot a + m \cdot b = a^2 - b^2$, rezultă că $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

Am demonstrat că:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b) \longleftrightarrow$$ **Diferența pătratelor a doi termeni este egală cu produsul dintre suma și diferența termenilor.**

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Există numeroase probleme practice care conduc la ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a$ este un număr real dat. Un exemplu simplu este următorul:

Se consideră un pătrat cu aria de 25 cm$^2$. Lungimea laturii pătratului, exprimată în centimetri, este egală cu $x$. Calculează lungimea laturii pătratului.

***Rezolvare:***

Înlocuind datele problemei, obținem ecuația $x^2 = 25$. Rezolvarea ecuației permite aflarea lungimii laturii pătratului. Într-adevăr:

- deoarece lungimea laturii pătratului este $x$ și aria oricărui pătrat este pătratul lungimii laturii sale, rezultă că aria pătratului considerat este $x^2$;
- pe de altă parte, conform enunțului, aria pătratului considerat este de 25 cm$^2$;
- rezultă ecuația în $\mathbb{R}$: $x^2 = 25$.

*Rezolvarea ecuației* se poate face prin două metode, ca în figurile alăturate.

| Metoda 1 | Metoda 2 |
|---|---|
| $x^2 = 25$ | $x^2 = 25$ |
| $\Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$ | $\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{25}$ |
| $\Leftrightarrow x^2 - 5^2 = 0$ | $\Leftrightarrow \lvert x \rvert = 5$ |
| $\Leftrightarrow (x + 5)(x - 5) = 0$ | $\Leftrightarrow x = 5$ sau $x = -5$. |
| $\Leftrightarrow x + 5 = 0$ sau $x - 5 = 0$ | Rezultă că $S = \{-5, 5\}$. |
| $\Leftrightarrow x = -5$ sau $x = 5$. | |
| Rezultă $S = \{-5, 5\}$. | |

Prin urmare, ecuația $x^2 = 25$ are două soluții: $-5$ și 5. Deoarece lungimea nu poate fi negativă, rezultă că lungimea laturii pătratului este egală cu 5 cm.

Prima metodă de rezolvare a ecuației $x^2 = 25$, numită metoda descompunerii în factori, se bazează pe faptul că $x^2 - 5^2 = (x + 5)(x - 5)$ (diferența pătratelor a doi termeni este egală cu produsul dintre suma și diferența termenilor) și va fi studiată în clasa a VIII-a.

Metoda a doua de rezolvare a ecuației $x^2 = 25$, pe care o numim metoda radicalului și a modulului, utilizează cunoștințe despre radicali și despre modulul unui număr real:

$$\text{oricare ar fi numărul real } x,\quad \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{și} \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

## Reține!

- **Rezolvarea ecuației $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$:**
  - **Dacă $a < 0$, atunci ecuația $x^2 = a$ nu are soluții** și scriem $S = \varnothing$.
    (Deoarece $x^2 \geq 0$ și $a < 0$, egalitatea $x^2 = a$ este imposibilă.)
  - **Dacă $a > 0$, atunci ecuația $x^2 = a$ are două soluții,** $\sqrt{a}$ și $-\sqrt{a}$, și scriem $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.
    (Se mai spune că ecuația are soluțiile $x = \sqrt{a}$ și $x = -\sqrt{a}$.)
  - **Dacă $a = 0$, atunci ecuația $x^2 = a$, adică ecuația $x^2 = 0$, are soluție unică $x = 0$** și scriem $S = \{0\}$.
- **Metode de rezolvare a ecuației $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$ și $a > 0$:**

| 1. Metoda radicalului și a modulului | 2. Metoda descompunerii în factori |
|---|---|
| $x^2 = a$ | $x^2 = a \Leftrightarrow x^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2$ |
| $\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{a}$ | $\Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0$ |
| $\Leftrightarrow \lvert x \rvert = \sqrt{a}$ | $\Leftrightarrow x + \sqrt{a} = 0$ sau $x - \sqrt{a} = 0$ |
| $\Leftrightarrow x = -\sqrt{a}$ sau $x = \sqrt{a}$. | $\Leftrightarrow x = -\sqrt{a}$ sau $x = \sqrt{a}$. |
| Rezultă că $S = \left\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right\}$. | Rezultă că $S = \left\{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\right\}$. |

## Aplicăm cunoștințele

Rezolvă ecuațiile: **a)** $(x - 1)^2 - 4 = 0$, $x \in \mathbb{Z}$; **b)** $(x - \sqrt{3})^2 - 3 = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** $(x - 1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{4} \Leftrightarrow \lvert x - 1 \rvert = 2$

$\Leftrightarrow x - 1 = 2$ sau $x - 1 = -2$

$\Leftrightarrow x = 3$ sau $x = -1$.

Deoarece $-1 \in \mathbb{Z}$ și $3 \in \mathbb{Z}$, rezultă mulțimea soluțiilor $S = \{3, -1\}$.

**b)** $(x - \sqrt{3})^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x - \sqrt{3})^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2} \Leftrightarrow \lvert x - \sqrt{3} \rvert = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ sau $x - \sqrt{3} = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$ sau $x = 0$.

Deoarece $2\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $0 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

rezultă mulțimea soluțiilor $S = \left\{2\sqrt{3}\right\}$.

**Observație:** Rezolvarea de mai sus arată importanța mulțimii în care se cere a fi rezolvată o ecuație. Mulțimea respectivă poate fi: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau orice altă mulțime $M \subset \mathbb{R}$.

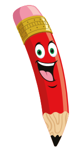
## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Precizează care dintre următoarele ecuații au ca soluție numărul real 2:
**a)** $x^2 = -4$; **b)** $x^2 = 2$; **c)** $x^2 = 4$; **d)** $3x^2 = 12$; **e)** $4x^2 + 1 = 17$.

**2** Precizează care dintre următoarele ecuații au ca soluție numărul real $-3$:
**a)** $5x^2 = 45$, $x \in \mathbb{R}$; **b)** $2x^2 + 1 = 19$, $x \in \mathbb{N}$; **c)** $5x^2 - 2 = 43$, $x \in \{-1, 0, 2\}$.

**3** Rezolvă ecuațiile:
**a)** $x^2 = 64$, $x \in \mathbb{R}$; **b)** $x^2 = \frac{4}{9}$, $x \in \mathbb{R}$; **c)** $x^2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$; **d)** $x^2 = 121$, $x \in \mathbb{R}$.

**4** Copiază, completând spațiile punctate, astfel încât afirmația rezultată să fie adevărată.
**a)** Pentru $m$ egal cu …, ecuația $x^2 = m$ are ca soluție pe 2.
**b)** Pentru $m$ egal cu …, ecuația $3x^2 = m$ are ca soluție pe $-1$.



**c)** Pentru $m$ egal cu …, ecuația $x^2 - 3 = m$ are ca soluție pe 3.

**d)** Pentru $m$ egal cu …, ecuația $5x^2 = m$ are ca soluție pe $-\frac{2}{5}$.

**e)** Pentru $m$ egal cu …, ecuația $2x^2 = m$ are ca soluție pe $-\sqrt{2}$.

**5** Rezolvă ecuațiile: **a)** $x^2 = 25, x \in \mathbb{N}$; **b)** $x^2 = 25, x \in \mathbb{Z}$; **c)** $x^2 = 7, x \in \mathbb{Q}$; **d)** $x^2 = 7, x \in \mathbb{R}$.

**6** Determină $x \in \mathbb{R}$, știind că:

**a)** $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$; **b)** $\frac{25}{x} = \frac{x}{4}$; **c)** $\frac{x}{6} = \frac{1}{x}$; **d)** $\frac{5}{x} = \frac{x}{4}$.

**7** Se consideră mulțimea $M = \left\{-2, 0, \frac{1}{9}, \frac{3}{5}, 4\right\}$ și ecuația $x^2 = m$, unde $m \in M$. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare o valoare a lui $m$ din mulțimea $M$, ecuația $x^2 = m$ să aibă:

**a)** soluții în $\mathbb{Z}$; **b)** soluții în $\mathbb{Q}$; **c)** soluții în $\mathbb{R}$; **d)** soluții în $\mathbb{N}$.

**8** Aria unui pătrat este egală cu 144 m². Calculează perimetrul pătratului.

**9** Calculează lungimea laturii unui pătrat a cărui arie este egală cu suma ariilor a două pătrate cu lungimile laturilor egale cu 3 cm, respectiv 4 cm.

**10** Rezolvă ecuațiile: **a)** $x^2 = 289, x \in \mathbb{Z}$; **b)** $x^2 = 49, x \in \mathbb{R}$; **c)** $x^2 = \frac{4}{3}, x \in \mathbb{Q}$; **d)** $x^2 = \frac{2}{9}, x \in \mathbb{R}$.

**11** Se consideră numerele $a^2 = (1-\sqrt{2})^2$ și $b^2 = (1+\sqrt{2})^2$. Calculează:

**a)** $|a|$ și $|b|$; **b)** media aritmetică a numerelor $|a|$ și $|b|$; **c)** media geometrică a numerelor $|a|$ și $|b|$.

**12** Rezolvă ecuațiile: **a)** $2x^2 = 32, x \in \mathbb{Z}$; **b)** $0{,}5x^2 = 12{,}5, x \in \mathbb{N}$; **c)** $\frac{4}{3}x^2 = 75, x \in \mathbb{R}$.

**13** Determină $x \in \mathbb{R}$, astfel încât:

**a)** $\frac{2}{x} = \frac{x}{2}$; **b)** $\frac{3x}{5} = \frac{5}{3x}$; **c)** $\frac{5}{2}x^2 = \frac{98}{5}$; **d)** $(x-1)^2 = 16$.

**14** Rezolvă ecuațiile: **a)** $(x+1)^2 = 4$; **b)** $(x-2)^2 = 1$; **c)** $(3x-1)^2 = 8$; **d)** $(3x-2)^2 - 4 = 0$.

**15** Se consideră numerele $a = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ și $p = a - b$.

**a)** Demonstrează că $p < 0$.

**b)** Calculează $a \cdot b$ și $p^2$.

**c)** Demonstrează că $\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} = -\sqrt{2}$.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1 Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Numărul real $-2\sqrt{3}$ este soluție a ecuației $x^2 = 12$. **A F**

**b)** Numărul întreg $-2$ este soluție a ecuației $4x^2 + 1 = 17$. **A F**

**c)** Ecuațiile $3x^2 = 12$ și $-x^2 + 3 = -1$ sunt echivalente. **A F**

**2 Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

| | |
|---|---|
| **a)** Lungimea laturii unui pătrat care are aria de 324 cm² este egală cu … | **1)** 18 cm; |
| **b)** Lungimea laturii unui pătrat care are aria egală cu suma ariilor a două pătrate cu lungimile laturilor de 12 cm, respectiv 16 cm este egală cu … | **2)** 10 cm; |
| **c)** Lungimea laturii unui pătrat care are aria egală cu diferența ariilor a două pătrate cu lungimile laturilor de 26 cm, respectiv 24 cm este egală cu … | **3)** 20 cm; |
| **d)** Perimetrul unui pătrat care are aria de 484 cm² este egal cu … | **4)** 25 cm; |
| | **5)** 88 cm. |

**3 Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Valoarea raportului soluțiilor ecuației $x^2 = 2^{104} - 2^{103} + 2^{100}$ este egală cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 4 Activități practice și exemple din viața cotidiană

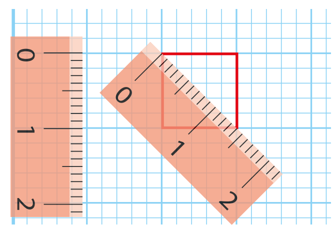
## 1. Activități practice

Deși erau cunoscute din cele mai vechi timpuri, numerele iraționale au fost recunoscute abia în secolul al XIX-lea. Mesopotamienii, cu 3000 de ani înainte de Hristos, cunoșteau aproximări foarte bune pentru numărul $\sqrt{2}$.

Teorema lui Pitagora și instrumentele de măsură permit găsirea unor valori aproximative pentru $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ etc. și aproximarea rezultatului unor calcule cu aceste numere.

### Exemplul 1

***Activitate practică*** *(activitate individuală):*




**a)** Utilizează un creion bine ascuțit și o riglă gradată și desenează pe foaia de matematică un pătrat cu latura de 1 cm.

**b)** Calculând cu teorema lui Pitagora lungimea diagonalei pătratului, se găsește că aceasta este egală cu $\sqrt{2}$ cm. În viața cotidiană, un astfel de rezultat este, de regulă, nefolositor. Măsoară lungimea diagonalei pătratului, notată cu *d*, apoi copiază și completează spațiile punctate:

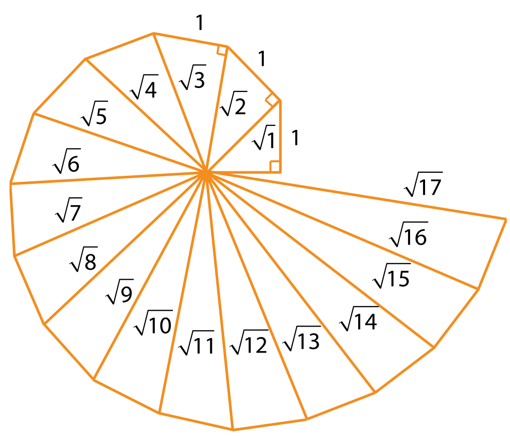
> $d = \ldots$ mm $= \ldots, \ldots$ cm.
> Dar, conform calculului, $d = \sqrt{2}$ cm. Rezultă că $\sqrt{2} \approx \ldots,\ldots$ .

**c)** Găsește o aproximație mai bună pentru $\sqrt{2}$, procedând astfel: reia activitățile practice a) și b), desenând un pătrat cu latura de 1 dm. Copiază și completează spațiile punctate:

> $d = \ldots$ mm $= \ldots, \ldots$ dm.
> Dar, conform calculului, $d = \sqrt{2}$ dm. Rezultă că $\sqrt{2} \approx \ldots, \ldots$ .

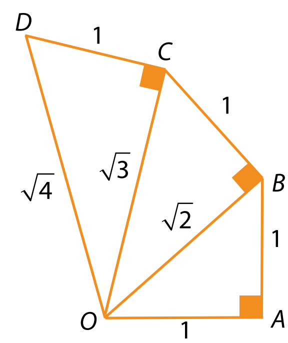
**Observație:** Pentru rezultate mai precise, se poate utiliza hârtia milimetrică. Imaginea de mai sus ilustrează măsurarea cu rigla a laturii și a diagonalei unui pătrat desenat pe hârtie milimetrică. Latura pătratului are lungimea de 1 cm = 10 mm, iar diagonala are lungimea $d = \ldots$ cm.

### Exemplul 2




**Spirala lui Teodor din Cirena** permite construirea unor segmente care au lungimile exprimate prin șirul de numere reale: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \ldots$. În imaginea din dreapta este prezentată **spirala lui Teodor din Cirena**.

*Teodor din Cirena*, matematician al Greciei antice (n. 465 î.H., d. 398 î.H.), a fost discipol al lui *Pitagora*. În afară de matematică, a fost interesat de astronomie, muzică și toate disciplinele legate de predare. În domeniul matematicii, a fost interesat de numere iraționale și a demonstrat că rădăcinile pătrate ale numerelor 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 și 17 sunt numere iraționale. Pitagorean convins, *Teodor din Cirena* a fost unul dintre principalii filozofi ai școlii din Cirena. (*Sursa: Wikipedia*, enciclopedie online liberă.)




***Activitate practică*** *(activitate individuală):*

**a)** Desenează **spirala lui Teodor din Cirena**, pornind de la desenarea triunghiului dreptunghic isoscel *OAB* din figura alăturată, cu *OA* = 1 cm și *AB* = 1 cm. Folosește:
– un creion bine ascuțit și o riglă gradată;
– un echer pentru a desena unghiurile drepte cu vârfurile în punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* … .

**b)** Folosind rigla gradată, măsoară lungimile segmentelor $OA$, $OB$, $OC$, $OD$, $OE$, $OF$ și $OG$, apoi copiază și completează tabelul următor:

| Segmentul | $OB$ | $OC$ | $OD$ | $OE$ | $OF$ | $OG$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Lungimea calculată | $\sqrt{2}$ | ? | ? | ? | ? | ? |
| Lungimea măsurată | 1,4 cm | ? | ? | ? | ? | ? |
| Concluzia | $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ | ? | ? | ? | ? | ? |

## Exemplul 3

***Activitate practică*** *(activitate individuală):*

**a)** Respectând datele menționate în tabelul de mai jos și folosind instrumentele geometrice, desenează triunghiurile dreptunghice $AMB$, $CND$ și $EPF$.

| Triunghiul | Lungimile catetelor | |
|---|---|---|
| $AMB$ | $MA = 1$ dm | $MB = 1$ dm |
| $CND$ | $NC = 1$ dm | $ND \equiv AB$ |
| $EPF$ | $PE = 2$ dm | $PF \equiv CD$ |

**Atenție!** Vei aplica cunoștințele de geometrie din clasa a VI-a, pentru a construi segmentul $ND$ congruent cu segmentul $AB$ și segmentul $PF$ congruent cu segmentul $CD$.

**b)** Folosind teorema lui Pitagora, calculează $AB$, $CD$ și $EF$.

**c)** Măsoară lungimile segmentelor $AB$, $CD$ și $EF$, apoi copiază și completează tabelul alăturat.

| Segmentul | $AB$ | $CD$ | $EF$ |
|---|---|---|---|
| Lungimea calculată | ? | ? | ? |
| Lungimea măsurată | ? | ? | ? |

**d)** Desenează o semidreaptă $OX$ și pe aceasta desenează segmentele $OR \equiv AB$, $RS \equiv CD$ și $ST \equiv EF$, apoi măsoară lungimea segmentului $OT$ și completează spațiile punctate:

> $OT = OR + RS + ST$.
> Ținând cont de faptul că $OR \equiv AB$, $RS \equiv CD$ și $ST \equiv EF$ și de lungimile calculate ale segmentelor $AB$, $CD$ și $EF$, rezultă că $OT = \ldots = \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)$ cm.
> Dar, din măsurare, a rezultat că $OT = \ldots$ cm. Prin urmare, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7} \approx \ldots$ .

**e)** Verifică rezultatul cu ajutorul unui calculator de buzunar.

## 2. Exemplu din viața cotidiană

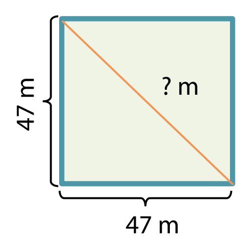
În multe situații practice, *rezultatul calculelor cu numere reale trebuie să fie aproximat printr-o fracție zecimală finită.*

Prin programe care au la bază teorii matematice sofisticate, calculatoarele au fost programate să facă acest lucru.

### Temă de investigație

Folosind cunoștințe matematice de clasa a VII-a, dar fără a utiliza calculatorul, estimează lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de 47 m.

Un teren în formă de pătrat are latura de 47 m. Exprimă în metri lungimea diagonalei pătratului.



# EVALUAREA UNITĂȚII DE ÎNVĂȚARE

## TEST

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate cu răspunsul corect.**

(5p) 1. Media geometrică a numerelor $9\sqrt{5}$ și $\sqrt{125}$ este egală cu ... .

(5p) 2. Lungimea laturii unui pătrat care are aria egală cu 100 $m^2$ este egală cu ... .

(5p) 3. Dacă media ponderată a numerelor 3 și 5, cu ponderile $a$ și $b$, este 3,4, atunci valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este egală cu ... .

(5p) 4. Media geometrică a două numere naturale este $\sqrt{11}$. Suma celor două numere este egală cu ... .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**

| | A | B |
|---|---|---|
| (5p) | 1. Soluția negativă a ecuației $2x^2 + 3 = 131$ este egală cu ... | a) $-3\sqrt{2}$; |
| (5p) | 2. Media geometrică a numerelor $3\sqrt{3}$ și $\sqrt{12}$ este egală cu ... | b) $3\sqrt{3}$; |
| (5p) | 3. Media aritmetică ponderată a numerelor $\sqrt{12}$ și $\sqrt{147}$, cu | c) $5\sqrt{3}$; |
| | ponderile 4, respectiv 6, este egală cu ... | d) $-8$; |
| (5p) | 4. Media aritmetică a numerelor $2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$ și $4\sqrt{3}$ este egală cu ... | e) $3\sqrt{2}$. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Media geometrică a numerelor $x$ și 14 este 28. Numărul $x$ este egal cu:
A. 56; B. 42; C. 14; D. 28.

(5p) 2. Dacă $x \neq 0$ și $\frac{x-3}{21} = \frac{3}{7x-21}$, atunci $x$ este egal cu:
A. 3; B. 6; C. 5; D. 7.

(5p) 3. Două numere reale pozitive au media geometrică egală cu $8\sqrt{3}$ și unul dintre ele este egal cu o treime din celălalt. Cel mai mic dintre numere este egal cu:
A. $2\sqrt{3}$; B. $6\sqrt{3}$; C. 8; D. $2\sqrt{2}$.

(5p) 4. Media aritmetică ponderată a numerelor $2^{-1}$ și $3^{-1}$, cu ponderile 4, respectiv 6, este egală cu:
A. 5; B. 0,4; C. $5^{-1}$; D. 0,6.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

(15p) IV. Se consideră numerele reale pozitive $a$, $b$ și $c$. Se știe că media geometrică a numerelor $a$ și $b$ este $3\sqrt{10}$, media geometrică a numerelor $b$ și $c$ este $2\sqrt{15}$, iar media geometrică a numerelor $a$ și $c$ este $6\sqrt{6}$. Determină numerele $a$, $b$ și $c$.

V. Se consideră mulțimea $M = \{0{,}36, -4, 0, 144, 3\}$. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr $m$ din mulțimea $M$, ecuația $x^2 = m$ să admită:

(3p) a) o singură soluție;

(3p) b) nicio soluție;

(3p) c) soluții reale;

(3p) d) soluții întregi;

(3p) e) soluții raționale.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV | V.a | V.b | V.c | V.d | V.e |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# 1. PROBLEME RECAPITULATIVE

**1** Calculează următorii radicali:

a) $\sqrt{2025}$; b) $\sqrt{1024}$; c) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4}$; d) $\sqrt{2024^2}$;

e) $\sqrt{0,0025}$; f) $\sqrt{56,25}$; g) $\sqrt{0,0625}$; h) $\sqrt{0,0196}$.

**2** Calculează $a$ și $b$ și apoi compară cele două numere, în fiecare dintre cazurile:

a) $a=\sqrt{12^2+16^2}$ și $b=\sqrt{12^2}+\sqrt{16^2}$; b) $a=\sqrt{13^2-5^2}$ și $b=\sqrt{13^2}-\sqrt{5^2}$;

c) $a=\sqrt{17^2\cdot 2^2}$ și $b=\sqrt{17^2}\cdot\sqrt{2^2}$; d) $a=\sqrt{28^2:7^2}$ și $b=\sqrt{28^2}:\sqrt{7^2}$.

**3** Încadrează numerele date între două numere naturale consecutive:

a) $\sqrt{27}$; b) $\sqrt{250}$; c) $\sqrt{16,25}$; d) $\sqrt{1957}$.

**4** Determină valoarea lui $a$, știind că:

a) $\sqrt{1176}=a\sqrt{6}$; b) $\sqrt{7350}=35\sqrt{a}$; c) $28\sqrt{6}=\sqrt{a}$.

**5** Se consideră mulțimea $A=\left\{-\sqrt{2},\sqrt{0,(3)},-1,7,\sqrt{16},\sqrt{1,(7)},-\sqrt{25},\sqrt{400},\sqrt{0,(4)}\right\}$. Determină mulțimile: $A\cap\mathbb{N}$, $A\cap\mathbb{Z}$, $A\cap\mathbb{Q}$, $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$, $A\setminus\mathbb{Z}$, $A\setminus\mathbb{Q}$.

**6** Ordonează crescător următoarele numere reale:

a) $\sqrt{250}, 11\sqrt{2}, 14, 10\sqrt{5}$; b) $8\sqrt{3}, \sqrt{128}, 9, 10\sqrt{2}$.

**7** Reprezintă elementele fiecăreia dintre mulțimile următoare pe câte o axă a numerelor:

$A=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid -\sqrt{5}<x<\sqrt{11}\right\}$; $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\leq 13\right\}$;

$C=\left\{x\in\mathbb{Z}\mid |3x|\leq 19\right\}$; $D=\left\{0,1,\sqrt{2},-1,-\sqrt{2},\sqrt{3},-\sqrt{3}\right\}$.

**Observație:** Pentru reprezentarea mulțimii $D$, consideră o unitate de măsură convenabilă și folosește teorema lui Pitagora.

**8** Calculează media geometrică a numerelor:

a) $a=\sqrt{2023}$ și $b=\sqrt{1575}$; b) $a=3^{-2}$ și $b=225$.

**9** Determină $x$, dacă:

a) $(x-5)^2=49$; b) $(x-3)^2=\left(1-\sqrt{3}\right)^2$; c) $0,5x^2+1,5=1,(6)$.

**10** Calculează $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}+\ldots+\dfrac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{9900}}$.

**11** Se consideră numărul $a=\sqrt{2023\cdot 2024+\sqrt{2023\cdot 2024}}$. Demonstrează că $a<2024$.

**12** Se consideră numerele $a=\dfrac{3}{\sqrt{3}}+(-1)^{2024}-\sqrt{3}$ și $b=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$. Calculează media aritmetică ponderată a numerelor $a$ și $b$, cu ponderile 2, respectiv 3.

## Proiect

**1.** Fără a folosi calculatorul, calculează $\sqrt{5318}$ cu o zecimală exactă.

**2.** Fie $x$ un număr natural. Demonstrează că există un număr natural $y$, astfel încât, aproximând $\sqrt{y}$ la unități, numărul real $\sqrt{x}$ poate fi calculat cu $n$ zecimale exacte ($n\geq 1$).

**3.** Fără a folosi calculatorul, calculează $\sqrt{5318}$ cu două zecimale exacte.

*Notă*. Dacă este nevoie, poți folosi calculatorul **doar** pentru a calcula pătratele unor numere naturale.

# 2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

(5p) 1. Suma numerelor raționale din mulțimea $M = \{2,\ -1,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{5}, \sqrt{9},\ -\sqrt{2}\}$ este egală cu … .

(5p) 2. Cel mai mare număr întreg mai mic decât $-3\sqrt{5}$ este egal cu … .

(5p) 3. Dacă $a = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$, atunci $\sqrt{10} \cdot a$ este egal cu … .

(5p) 4. Numărul negativ $x$ din proporția $\dfrac{\sqrt{0,(3)}}{x} = \dfrac{x}{\sqrt{588}}$ este egal cu … .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**

| A | B |
|---|---|
| (5p) 1. $\sqrt{144}-\sqrt{225}+\sqrt{324}$ este egal cu … | a) 0; |
| (5p) 2. $\left(\sqrt{576}-\sqrt{64}\right):\sqrt{16}-1$ este egal cu … | b) 15; |
| (5p) 3. $\sqrt{5^2-3^2}+\sqrt{13^2-12^2}$ este egal cu … | c) 3; |
| (5p) 4. $\sqrt{20^2+15^2}-\sqrt{25^2-15^2}$ este egal cu … | d) 5; |
| | e) 9. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Rezultatul calculului $\sqrt{10^3-10^2}$ este egal cu:
A. 90; B. 10; C. 30; D. 55.

(5p) 2. Comparând numerele $a = \sqrt{49}$, $b = 4\sqrt{3}$ și $c = 5\sqrt{2}$, rezultă:
A. $a < b < c$; B. $c < a < b$; C. $b < a < c$; D. $b < c < a$.

(5p) 3. Încadrează numărul $-\sqrt{5}$ între două numere întregi consecutive. Media aritmetică a celor două numere întregi consecutive este egală cu:
A. −2,3; B. −2,5; C. −2,4; D. −2,6.

(5p) 4. Dacă $a = \sqrt{1444}$ și $b = \sqrt{2^4 \cdot 3^2}$, atunci rezultatul calculului $a - 3b$ este egal cu:
A. 38; B. 24; C. 12; D. 2.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

(5p) IV. a) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(x-3\sqrt{2}\right)^2 = 8$ și notează cu $x_1$ și $x_2$ soluțiile ecuației.

(5p) b) Calculează media aritmetică a soluțiilor ecuației.

(5p) c) Calculează $\sqrt{x_1^2 - x_2^2}$.

V. Se consideră numerele $a = 3\sqrt{162} - \sqrt{450}$ și $b = 7\sqrt{8} - \sqrt{50}$. Calculează:

(5p) a) media aritmetică ponderată a numerelor $a$ și $b$, cu ponderile 1, respectiv 2;

(5p) b) media geometrică a numerelor $a$ și $b$;

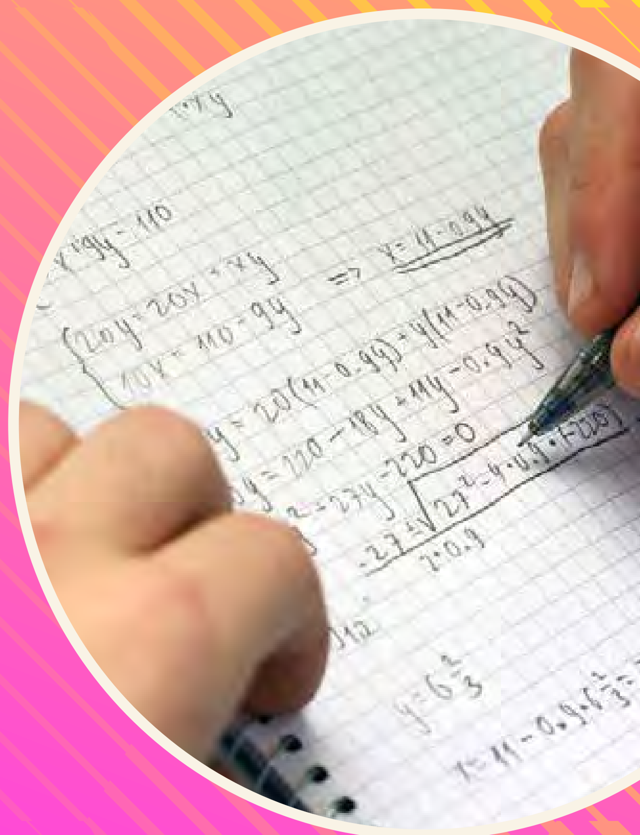
(5p) c) raportul dintre media aritmetică și media geometrică ale celor două numere.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

2

# ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE



**Unitatea: Ecuații și sisteme de ecuații liniare**

L1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

L2. Ecuații de forma $ax+b=0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente

L3. Sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute

L4. Rezolvarea sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute. Metoda substituției și metoda reducerii

L5. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații

**Evaluare: Ecuații și sisteme de ecuații liniare**

1. Probleme recapitulative
2. Test de evaluare

# UNITATEA: ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

## LECȚIA 1 Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

### ◆ Proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale

#### Ne amintim

Pe mulțimea numerelor reale am definit: *adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere, rădăcina pătrată* și *proprietățile acestora*. Un rol important în calculele cu numere reale îl au *relația de egalitate* „=" și *proprietățile acesteia*. Le denumim și definim în tabelele de mai jos.

**Egalitatea**

| Proprietatea | Definirea proprietății |
|---|---|
| Reflexivitatea | Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $a = a$. |
| Simetria | Oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, dacă $a = b$, atunci $b = a$. |
| Tranzitivitatea | Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, dacă $a = b$ și $b = c$, atunci $a = c$. |

**Egalitatea și adunarea/scăderea**

| Proprietatea | Definirea proprietății |
|---|---|
| Adunarea unui număr la o egalitate | Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$. |
| Scăderea unui număr dintr-o egalitate | Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, dacă $a = b$, atunci $a - c = b - c$. |

**Egalitatea și înmulțirea/împărțirea**

| Proprietatea | Definirea proprietății |
|---|---|
| Înmulțirea unei egalități cu un număr | Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$. |
| Împărțirea unei egalități la un număr nenul | Oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, dacă $a = b$ și $c \neq 0$, atunci $a : c = b : c$. |

Într-o egalitate, partea scrisă în stânga semnului „=" se numește *membrul stâng* sau *membrul I* al egalității, iar partea scrisă în dreapta semnului „=" se numește *membrul drept* sau *membrul II* al egalității.

**Știai că...**

*Egalitățile* constituie una dintre primele cuceriri matematice ale științei. Ele apar în cele mai vechi scrieri matematice, de exemplu în texte cuneiforme care datează din secolul III î.H. și în papirusuri provenind din Egipt din jurul anului 1800 î.H.
Semnul egalității folosit astăzi (=) a fost propus de ROBERT RECORDE (1510-1558), medic și matematician galez, dar a durat destul de mult până când s-a încetățenit. El a făcut această propunere într-un manual de algebră scris sub formă de dialog, intitulat „Piatra Spiritului". De asemenea, în anul 1557 a propus vorbitorilor de limba engleză semnele preexistente plus (+) și minus (–) .

#### Observăm și descoperim cunoștințe noi

**1.** Dacă $a$, $b$ și $c$ sunt numere reale, atunci:
- adunând numărul $c$ în ambii membri ai egalității $a = b$, rezultă că $a + c = b + c$;
- adunând opusul numărului $c$ în ambii membri ai egalității $a + c = b + c$, rezultă că $a = b$.

Despre egalitățile $a = b$ și $a + c = b + c$ spunem că sunt egalități echivalente, deoarece se obțin una din cealaltă.

Notăm:

$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$ ⟷ Dacă se adună sau dacă se scade același număr din fiecare membru al unei egalități date, se obține o egalitate echivalentă cu cea dată.

**2.** Dacă $a$, $b$ și $c$ sunt numere reale, atunci:
- înmulțind egalitatea $a = b$ cu $c \neq 0$, rezultă că $a \cdot c = b \cdot c$;
- înmulțind egalitatea $a \cdot c = b \cdot c$ cu inversul lui $c$, $c \neq 0$, rezultă că $a = b$.

Prin urmare, pentru $c \neq 0$, egalitățile $a = b$ și $a \cdot c = b \cdot c$ sunt egalități echivalente.

$a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c, c \neq 0$ ⟷ Dacă se înmulțește sau dacă se împarte fiecare membru al unei egalități date la același număr diferit de 0, se obține o egalitate echivalentă cu cea dată.

**3.** Dacă $a$, $b$ și $c$ sunt numere reale, atunci egalitățile $a + b = c$ și $a = c - b$ sunt echivalente.
Într-adevăr, egalitățile $a + b = c$ și $a = c - b$ rezultă una din alta, după cum urmează:
- dacă se scade numărul $b$ din fiecare membru al egalității $a + b = c$, rezultă că $a = c - b$;
- dacă se adună numărul $b$ la fiecare membru al egalității $a = c - b$, rezultă că $a + b = c$.

Prin urmare:

$a + b = c \Leftrightarrow a = c - b$ ⟷ Dacă într-o egalitate dată trecem un termen dintr-un membru în altul, cu semn schimbat, se obține o egalitate echivalentă cu cea dată.

## Reține!

- Pe mulțimea numerelor reale, **relația de egalitate** „=" este:
  - **reflexivă** – oricare ar fi numărul real $a$, $a = a$;
  - **simetrică** – oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, dacă $a = b$, atunci $b = a$;
  - **tranzitivă** – oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$, dacă $a = b$ și $b = c$, atunci $a = c$.
- **Egalități echivalente**
  - Două egalități sunt **egalități echivalente** dacă fiecare se obține din cealaltă.
  - Pornind de la o egalitate, se pot obține egalități echivalente cu aceasta prin următoarele **transformări**:
    – se adună sau se scade, din ambii membri ai egalității, același număr real;
    – se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității la același număr real nenul.
  - **Dacă cei doi membri ai unei egalități sunt numere pozitive, atunci se pot obține egalități echivalente și astfel:**
    – se ridică la puterea $n$ ambii membri ai egalității, $n$ fiind număr întreg.
    – se extrage radicalul din ambii membri ai egalității.

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Demonstrează echivalența egalităților $\frac{2}{3}x - \frac{5}{\sqrt{5}} = 0,(6)y - \sqrt{5}$ și $x = y$.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Deoarece $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ și $0,(6) = \frac{2}{3}$, rezultă succesiv următoarele egalități echivalente:

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{\sqrt{5}} = 0,(6)y - \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - \sqrt{5} = \frac{2}{3}y - \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{2}{3}y \Leftrightarrow x = y.$$

## EXERCIȚIUL 2

Determină numerele reale $x$ pentru care $\overbrace{3x^2 - 10}^{\mathrm{I}} = \overbrace{2 - x^2}^{\mathrm{II}}$.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

$+x^2$ $\boxed{3x^2 - 10 = 2 - x^2}$ $+x^2$

$\boxed{3x^2 - 10 + x^2 = 2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}$

adică

$+10$ $\boxed{4x^2 - 10 = 2}$ $+10$

$\boxed{4x^2 - \cancel{10} + \cancel{10} = 2 + 10}$

adică

$:4$ $\boxed{4x^2 = 12}$ $:4$

$\boxed{(4x^2) : 4 = 12 : 4}$

de unde

$\boxed{x^2 = 3}$

$\boxed{\sqrt{x^2} = \sqrt{3}}$

Comentarii:

1. adunarea numărului $x^2$ în ambii membri ai egalității (*se trece termenul $x^2$ din membrul II în membrul I cu semn schimbat*);
2. adunarea numărului 10 în ambii membri ai egalității (*se trece* –10 *din membrul I în membrul II cu semn schimbat*);
3. împărțirea la 4 a ambilor membri ai egalității (*se împarte fiecare membru al egalității la* 4);
4. două numere egale au aceeași rădăcină pătrată.

Rezultă că $|x| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ sau $x = -\sqrt{3}$. Deci numerele căutate sunt $\sqrt{3}$ și $-\sqrt{3}$.

## ◆ Identități

### Rezolvăm împreună

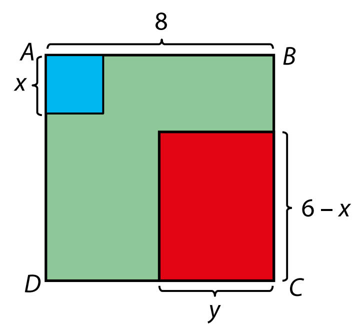
În figura de mai jos sunt reprezentate un pătrat *ABCD*, un pătrat colorat cu albastru și un dreptunghi colorat cu roșu, iar dimensiunile sunt exprimate în centimetri.

**a)** Calculează aria suprafeței colorate cu verde.

**b)** Calculează aria suprafeței colorate cu verde, dacă $x = 2$ și $y = 4$.

### Ne amintim

- cum se calculează aria unui pătrat;
- cum se calculează aria unui dreptunghi.




***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Deoarece aria suprafeței *ABCD* este egală cu $AB^2 = 8^2$ cm² $= 64$ cm², aria suprafeței colorate cu albastru este egală cu $x^2$ cm², iar aria suprafeței colorate cu roșu este egală cu $(6 - x) \cdot y$ cm², rezultă că aria suprafeței colorate cu verde este $64 - [x^2 + (6 - x) \cdot y]$ cm².

**b)** Pentru $x = 2$ și $y = 4$, aria suprafeței colorate cu verde este egală cu:

$64 - [2^2 + (6 - 2) \cdot 4] = 44$ cm².

### Observăm și descoperim cunoștințe noi

Despre $64 - [x^2 + (6 - x) \cdot y]$ se spune că este o expresie matematică. Noțiunea de expresie matematică poate fi descrisă astfel:

Se consideră o mulțime de numere, de regulă mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, și literele *a*, *b*, *c etc.*, pe care le numim variabile, nedeterminate sau necunoscute și care pot fi înlocuite cu elemente din mulțimea numerelor reale sau din submulțimi ale mulțimii numerelor reale.

- Toate numerele și variabilele sunt expresii.
- Suma, diferența, produsul și câtul a două expresii sunt, de asemenea, expresii, împărțirea cu zero fiind exclusă.
- Modulul, ridicarea la putere și rădăcina pătrată ale unei expresii sunt expresii.

Cu ajutorul noțiunii de *expresie matematică* se poate defini *noțiunea de identitate*.

## Reține!

- Numim **identitate** egalitatea a două expresii care conțin una sau mai multe variabile, dacă, prin înlocuirea acestora cu elemente din mulțimea numerelor reale sau din submulțimi de numere reale precizate, egalitatea obținută este adevărată oricare ar fi înlocuirea aleasă.
- Deoarece identitatea este o egalitate, două identități sunt **identități echivalente** dacă fiecare se obține una din cealaltă.
- Dintr-o identitate dată se obține o altă identitate echivalentă cu aceasta prin transformările descrise la egalități.

*Exemple:*

**1)** Egalitatea $\sqrt{x^2}=|x|$, $x \in \mathbb{R}$, este o identitate pe $\mathbb{R}$ cu variabila $x$, deoarece, dacă înlocuim pe $x$ cu orice număr real, egalitățile obținute sunt adevărate.

**2)** Egalitatea $|xy| = |x| \cdot |y|$, $x, y \in \mathbb{R}$, este o identitate cu două variabile, $x$ și $y$, deoarece, dacă înlocuim pe $x$ și pe $y$ cu orice număr real, egalitățile obținute sunt adevărate.

Analog, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ și $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, sunt *identități cu trei variabile*.

**3)** Egalitatea $1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n\cdot(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, este o identitate cu variabila $n$.

**4)** Egalitatea $x \cdot (x - 1) = (x^2 - x) \cdot y$, cu $x, y \in \mathbb{R}$, nu este o identitate, deoarece, înlocuind variabilele cu numere din $\mathbb{R}$, egalitatea rezultată nu este adevărată pentru orice înlocuire aleasă. De exemplu, dacă alegem să înlocuim pe $x$ cu 2 și pe $y$ cu 0, obținem egalitatea $2 = 0$, care nu este adevărată.

**5)** Egalitatea $x \cdot (x - 1) \cdot y = (x^2 - x) \cdot y$, cu $x \in \{0, 1\}$ și $y \in \mathbb{R}$, este o identitate, deoarece, înlocuind variabila $x$ cu oricare dintre numerele 0 sau 1 și variabila $y$, cu orice număr real, se obține egalitatea $0 = 0$.

## Aplicăm cunoștințele

Demonstrează că egalitatea $64 - [x^2 + (6 - x) \cdot y] = x \cdot (y - x) - 2 \cdot (3y - 32)$, cu $x, y \in \mathbb{R}$, este o identitate.

***Rezolvare** (activitate frontală):*

În egalitatea din enunț, aplicând regulile de calcul și proprietățile operațiilor cu numere reale, efectuăm calculele în membrul stâng și în membrul drept:

| **Membrul stâng:** $64 - [x^2 + (6 - x) \cdot y]$ | **Reguli și proprietăți aplicate** |
|---|---|
| **1)** $64 - (x^2 + 6y - xy)$ | **1)** distributivitatea înmulțirii față de scădere |
| **2)** $64 - x^2 - 6y + xy$ | **2)** minusul în fața unei paranteze schimbă semnele din paranteză |
| **3)** $-x^2 + xy - 6y + 64$ | **3)** comutativitatea adunării, cu scopul ordonării termenilor sumei $(+64) + (-x^2) + (-6y) + (+xy)$ după puterile lui $x$ |
| **4)** $-x^2 + xy - 6y + 64$ | **4)** rezultatul calculului membrului stâng |

| **Membrul drept:** $x \cdot (y - x) - 2 \cdot (3y - 32)$ | **Reguli și proprietăți aplicate** |
|---|---|
| **1)** $xy - x^2 - (2 \cdot 3y - 2 \cdot 32)$ | **1)** distributivitatea înmulțirii față de scădere |
| **2)** $xy - x^2 - 6y + 64$ | **2)** efectuarea înmulțirilor și minusul în fața unei paranteze schimbă semnele din paranteză |
| **3)** $-x^2 + xy - 6y + 64$ | **3)** comutativitatea adunării, cu scopul ordonării termenilor sumei $(+xy) + (-x^2) + (-6y) + (+64)$ după puterile lui $x$ |
| **4)** $-x^2 + xy - 6y + 64$ | **4)** rezultatul calculului membrului drept |

Rezultă că, oricare ar fi numerele reale $x$ și $y$, avem relațiile:

$$64 - [x^2 + (6 - x) \cdot y] = -x^2 + xy - 6y + 64 \quad \text{și} \quad x \cdot (y - x) - 2 \cdot (3y - 32) = -x^2 + xy - 6y + 64.$$

Având în vedere că relația de egalitate este simetrică și tranzitivă, rezultă:

$$64 - [x^2 + (6 - x) \cdot y] = x \cdot (y - x) - 2 \cdot (3y - 32), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare, egalitatea din enunț este o *identitate*, deoarece ea este adevărată oricare ar fi numerele reale $x$ și $y$.

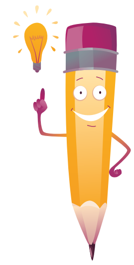
## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Copiază și completează spațiile punctate, astfel încât egalitățile rezultate să fie echivalente.

**a)** $x=2 \Leftrightarrow x+3=2+\ldots \Leftrightarrow x+3=\ldots;$ **b)** $x=-3 \Leftrightarrow x+4=\ldots+4 \Leftrightarrow x+4=\ldots;$

**c)** $x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x-\frac{1}{3}=\ldots \Leftrightarrow x-\frac{1}{3}=\ldots;$ **d)** $x=-3\sqrt{2} \Leftrightarrow x+\sqrt{50}=\ldots$.

**2** Copiază și completează spațiile punctate, astfel încât egalitățile rezultate să fie echivalente.



**a)** $x=-1 \Leftrightarrow 3x=\ldots\cdot(-1) \Leftrightarrow \ldots;$ **b)** $x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow 8\cdot x=8\cdot\ldots \Leftrightarrow \ldots;$

**c)** $x=\sqrt{24} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot x=\sqrt{2}\cdot... \Leftrightarrow \ldots;$ **d)** $x=-2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{75}\cdot x=\ldots\cdot\left(-2\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \ldots$.

**3** Copiază și completează spațiile punctate, astfel încât egalitățile rezultate să fie echivalente.

**a)** $7x=21 \Leftrightarrow \frac{7x}{...}=\frac{21}{7} \Leftrightarrow x=\ldots;$ **b)** $\frac{1}{3}x=11 \Leftrightarrow x=\ldots;$

**c)** $5\sqrt{2}\cdot x=10 \Leftrightarrow x=\ldots;$ **d)** $3\sqrt{3}\cdot x=9 \Leftrightarrow x=\ldots$.

**4** Copiază și completează spațiile punctate, astfel încât egalitățile rezultate să fie echivalente.

**a)** $x-3=5 \Leftrightarrow x-3+3=\ldots \Leftrightarrow x=\ldots;$ **b)** $x+\frac{2}{3}=1 \Leftrightarrow x+\frac{2}{3}\ \ldots=1-\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\ldots$.

**5** Se consideră numerele nenule $a$, $b$, $c$ și $d$. Copiază și completează spațiile punctate, astfel încât egalitățile rezultate să fie echivalente.

**a)** $2a=3b \Leftrightarrow \frac{a}{...}=\frac{b}{...} \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\ldots;$ **b)** $5a=7b \Leftrightarrow \frac{...}{a}=\frac{...}{b}$ sau $\frac{b}{a}=\ldots;$ **c)** $a\cdot b=c\cdot d \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{...}{...} \Leftrightarrow \frac{a}{d}=\frac{...}{...}$.

**6** Se consideră propoziția: „Dacă $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$, atunci $25x^2=9y^2$."

**a)** Arată că, pentru orice $x$ și $y$ numere reale, propoziția este adevărată.

**b)** Scrie reciproca acestei propoziții și stabilește dacă aceasta este o propoziție adevărată sau falsă.

**7** Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$, $2x+y\neq 0$ și $\frac{5x-2y}{2x+y}=0{,}25$, calculează $\frac{x}{y}$.

**8** Arată că, pentru orice număr natural $n$, au loc identitățile:

**a)** $2^n+2^n+2^{n+1}+2^{n+2}+2^{n+3}=2^{n+4};$ **b)** $2^{n-3}\cdot 8^{n+1}+2^{n-1}\cdot 3^n+2^{n-1}\cdot 3^{n+2}-6^{n+1}=16^n-6^n$.

**9** Dacă $x$ și $y$ sunt numere reale, astfel încât $5x+3=2y$, arată că:

**a)** $5x-2=2y-5;$ **b)** $10x^2+6x=4xy;$ **c)** $\frac{x}{2}+0{,}3=\frac{y}{5}$.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1 Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Dacă $a+b=7$, atunci $4\cdot a+4\cdot b=56$. **A** **F**

**b)** Dacă $3\cdot a+3\cdot b=42$, atunci $2\cdot a+2\cdot b=28$. **A** **F**

**c)** Dacă $a-3\cdot b=7$ și $b+2\cdot c=21$, atunci $a+6\cdot c=70$. **A** **F**

**2 Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**

Dacă $a$, $b$, $c$ sunt numere reale pozitive și $a\cdot b=6$, $b\cdot c=15$, $c\cdot a=10$, atunci:

**a)** $a\cdot b\cdot c$ este egal cu … **1)** 10;

**b)** $a+b+c$ este egal cu … **2)** 900;

**c)** $a^2b^2c+ab^2c^2+a^2bc^2$ este egal cu … **3)** 30;

**4)** 930.

**3 Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

Dacă $a$, $b$, $c$ sunt numere reale și $a+b=\sqrt{18}$, $b+c=-\sqrt{2}$ și $c+a=3\sqrt{8}$, atunci rezultatul calculului $a+b+c$ este egal cu $\boxed{\phantom{000}}$.

# LECȚIA 2 Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente

## Ne amintim

- **Ecuația** este o egalitate între două expresii care conțin una sau mai multe variabile ce pot fi înlocuite cu elemente din submulțimi precizate ale mulțimii numerelor reale.
Dacă nu se specifică altfel, se consideră că oricare dintre variabilele ecuației poate fi înlocuită cu numere reale.
- Variabilele din cele două expresii se numesc **necunoscutele ecuației**.
- Dacă, prin înlocuirea necunoscutelor unei ecuații cu elemente din submulțimi precizate ale mulțimii numerelor reale, egalitatea rezultată este adevărată, despre numerele respective se spune că determină o **soluție a ecuației**.

*Exemplu de **ecuație**:* $\sqrt{x} = -\frac{1}{y}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_-$, unde $x$ și $y$ sunt **necunoscutele ecuației**.
Înlocuind în ecuație pe $x$ cu 4 și pe $y$ cu $-0{,}5$, egalitatea $\sqrt{x} = -\frac{1}{y}$ este adevărată. Observând că $4 \in \mathbb{R}_+$ și $-0{,}5 \in \mathbb{R}_-$, despre numerele 4 și $-0{,}5$ corespunzătoare necunoscutelor $x$ și $y$ se spune că determină o **soluție a ecuației**. Soluția se notează prin scrierea numerelor 4 și $-0{,}5$ între două paranteze rotunde, cu respectarea ordinii corespunzătoare necunoscutelor.
Prin urmare, spunem că perechea $(4; -0{,}5)$ este o soluție a ecuației.

- **A rezolva o ecuație** înseamnă a găsi mulțimea tuturor soluțiilor acesteia.
- Deoarece ecuația este o egalitate, două ecuații sunt **ecuații echivalente** dacă se obțin una din cealaltă. Două ecuații sunt **ecuații echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

## Rezolvăm împreună

**Exercițiul 1**

Mihaela, Andreea și Mihai au avut de rezolvat următoarea problemă:

Determinați numerele reale $x$ care verifică egalitatea $\frac{1}{\sqrt{2}}x - 3 = \sqrt{2}x - 4$.

| Mihaela rezolvă și afirmă că numărul $x$ este $2\sqrt{2}$. | Mihai rezolvă și afirmă că numărul $x$ este $\sqrt{2}$. | Andreea rezolvă și afirmă că $\sqrt{2}$ este singurul număr real care verifică egalitatea din enunțul problemei. |
|---|---|---|

Stabilește cine are dreptate.

***Rezolvare** (activitate frontală):*

- Înlocuim pe $x$ cu $2\sqrt{2}$ și obținem: $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} - 3 = -1 \\ \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} - 3 \neq \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - 4.$

Rezultă că numărul $2\sqrt{2}$, găsit de Mihaela, nu verifică egalitatea.

- Înlocuim pe $x$ cu $\sqrt{2}$ și obținem $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} - 3 = -2 \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 4 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} - 3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 4.$

Rezultă că numărul $\sqrt{2}$, găsit de Mihai, verifică egalitatea.

- Observăm că problema poate fi reformulată astfel: *Să se rezolve ecuația $\frac{1}{\sqrt{2}}x - 3 = \sqrt{2}x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.*

Rezolvarea ecuației este următoarea:
Deoarece prin trecerea unui număr dintr-un membru în celălalt se obține o egalitate echivalentă, rezultă:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x-3=\sqrt{2}x-4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x-\sqrt{2}x=-4+3.$$

Efectuând calculele în fiecare membru, rezultă:

membrul I: $\frac{1}{\sqrt{2}}x-\sqrt{2}x=\frac{^{\sqrt{2})}1}{\sqrt{2}}x-\sqrt{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}x=\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\sqrt{2}x=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}x;$

membrul II: $-4+3=-1.$

Rezultă: $\frac{1}{\sqrt{2}}x-3=\sqrt{2}x-4 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}x=-1.$

Înmulțim ultima egalitate cu inversul numărului $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ și obținem egalitatea $x=(-1)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, care, după efectuarea calculelor, se scrie $x=\sqrt{2}$.

Prin urmare, ecuația dată $\frac{1}{\sqrt{2}}x-3=\sqrt{2}x-4,\ x\in\mathbb{R}$, este echivalentă cu ecuația $x=\sqrt{2},\ x\in\mathbb{R}$, care are soluție unică numărul $\sqrt{2}$. Se scrie $S=\left\{\sqrt{2}\right\}$. De aici rezultă că $\sqrt{2}$ este singurul număr real care verifică egalitatea din enunț și, ca urmare, Andreea are dreptate.

**EXERCIȚIUL 2**

Rezolvă ecuațiile:

**a)** $x\sqrt{8}+4=0,\ x\in\mathbb{R};$ **b)** $x\cdot\left(\sqrt{8}-2\sqrt{2}\right)=0,\ x\in\mathbb{R};$ **c)** $\left(\sqrt{8}-2\sqrt{2}\right)\cdot x-3=0,\ x\in\mathbb{R}.$

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Adunând opusul lui 4 în fiecare membru al egalității din enunț, rezultă egalitatea echivalentă $x\sqrt{8}=-4$. Înmulțind fiecare membru al egalității $x\sqrt{8}=-4$ cu inversul numărului $\sqrt{8}$, rezultă egalitatea echivalentă $x=\frac{-4}{\sqrt{8}}$. Deoarece $\frac{-4}{\sqrt{8}}=\frac{-4\sqrt{8}}{8}=\frac{-4\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{8}=-\sqrt{2}$, egalitatea $x=\frac{-4}{\sqrt{8}}$ este echivalentă cu egalitatea $x=-\sqrt{2}$. Ecuația dată $x\sqrt{8}+4=0,\ x\in\mathbb{R}$, este echivalentă cu ecuația $x=-\sqrt{2},\ x\in\mathbb{R}$, care are soluția $-\sqrt{2}$. Deci soluția ecuației este $S=\left\{-\sqrt{2}\right\}$.

**b)** Observând că $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ și $\sqrt{8}-2\sqrt{2}=0$, rezultă că egalitatea $x\left(\sqrt{8}-2\sqrt{2}\right)=0$ este echivalentă cu egalitatea $x\cdot 0=0$, care este echivalentă cu identitatea $0=0$. Prin urmare, $x(\sqrt{8}-2\sqrt{2})=0$, oricare ar fi numărul real $x$. Rezultă că orice număr real $x$ este soluție a ecuației date, adică mulțimea soluțiilor ecuației este mulțimea numerelor reale și scriem $S=\mathbb{R}$.

**c)** Observând că $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ și $\sqrt{8}-2\sqrt{2}=0$, rezultă că egalitatea $\left(\sqrt{8}-2\sqrt{2}\right)x-3=0$ este echivalentă cu egalitatea $x\cdot 0-3=0$, adică cu egalitatea $-3=0$, care este falsă. Prin urmare, ecuația dată nu are nicio soluție. Spunem că mulțimea soluțiilor ecuației date este mulțimea vidă și scriem $S=\varnothing$.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Constatăm că ecuațiile de mai sus sunt ecuații de forma $ax+b=0,\ x\in\mathbb{R}$, unde $a$ și $b$ sunt numere reale date:

- pentru ecuația $x\sqrt{8}+4=0,\ x\in\mathbb{R}$, avem $a=\sqrt{8}$ și $b=4$;
- pentru ecuația $x\left(\sqrt{8}-2\sqrt{2}\right)=0,\ x\in\mathbb{R}$, avem $a=\sqrt{8}-2\sqrt{2}$ și $b=0$;
- pentru ecuația $\left(\sqrt{8}-2\sqrt{2}\right)x-3=0,\ x\in\mathbb{R}$, avem $a=\sqrt{8}-2\sqrt{2}$ și $b=-3$.

## Reține!

- Dacă $a$ și $b$ sunt numere reale date, cu $a \neq 0$, ecuația de forma $\boldsymbol{ax+b=0}$, $x \in \mathbb{R}$, se numește **ecuație de gradul întâi cu o necunoscută**.
  - Numerele $a$ și $b$ sunt **coeficienții** ecuației ($a$ este **coeficientul necunoscutei**, iar $b$ este **termenul liber**).
  - Numărul real $x$ este **necunoscuta** sau **variabila** ecuației.
- **Rezolvarea ecuației $ax+b=0$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a$ și $b$ sunt numere reale date:**
  - dacă $a \neq 0$, atunci $ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$ și $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$;
  - dacă $a=0$ și $b \neq 0$, atunci $ax+b=0 \Leftrightarrow 0=-b$, ceea ce este absurd, și rezultă că ecuația nu are soluții, adică $S=\varnothing$;
  - dacă $a=0$ și $b=0$, atunci $ax+b=0 \Leftrightarrow 0=0$, care este o identitate, și rezultă că orice număr real $x$ este soluție a ecuației, adică $S=\mathbb{R}$.

## Aplicăm cunoștințele

Rezolvă ecuația: $x\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)-x\cdot\left(x+2\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}=-4\sqrt{3}x-\frac{6}{\sqrt{3}}$.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

$x\cdot\left(x-\sqrt{3}\right)-x\cdot\left(x+2\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}=-4\sqrt{3}x-\frac{6}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow x^2-x\sqrt{3}-x^2-2x\sqrt{3}-\sqrt{3}=-4\sqrt{3}x-\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$ ⟷ se desființează parantezele și se reduc termenii asemenea în fiecare membru

$\Leftrightarrow (-1-2)x\sqrt{3}-\sqrt{3}=-4\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow -3x\sqrt{3}-\sqrt{3}=-4\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow -3x\sqrt{3}+4\sqrt{3}x=-2\sqrt{3}+\sqrt{3}$ ⟷ se trec termenii care conțin necunoscuta într-un membru al ecuației, iar termenii liberi (care nu conțin necunoscuta), în celălalt membru al ecuației, schimbând semnele la trecerea dintr-un membru în celălalt

$\Leftrightarrow (-3+4)\cdot\sqrt{3}x=(-2+1)\cdot\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x=-\sqrt{3}$ ⟷ se scoate factorul comun

$\Leftrightarrow x=\left(-\sqrt{3}\right):\left(\sqrt{3}\right)$ ⟷ se împarte fiecare membru al ecuației la coeficientul necunoscutei

$S=\{-1\}$ ⟷ se scrie mulțimea soluțiilor ecuației

**Reține etapele rezolvării unei ecuații!**

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Precizează care dintre ecuațiile de mai jos au ca soluție numărul real $-2$.

**a)** $x-3=-5$, $x \in \mathbb{R}$; **b)** $4x+8=0$, $x \in \{-1, 0, 2\}$; **c)** $\sqrt{2}x+2\sqrt{2}=0$, $x \in \mathbb{N}$.

**2** Scrie ecuația $ax+b=0$ pentru:

**a)** $a=1$ și $b=\sqrt{2}$; **b)** $a=-3$ și $b=\sqrt{2}$; **c)** $a=\frac{2}{3}$ și $b=-5$.

**3** Scrie trei ecuații echivalente cu ecuația $2x+3=0$, $x \in \mathbb{R}$.

**4** Rezolvă în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

**a)** $-x + 6 = 0$; **b)** $3x - 1 = 0$; **c)** $\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = 0$; **d)** $\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} = 0$.

**5** Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

**a)** $-2x + 10 = 0$; **b)** $5x - 2 = 0$; **c)** $\frac{4}{5}x + \frac{12}{5} = 0$; **d)** $3\sqrt{2}x - 9\sqrt{2} = 0$.

**6** Rezolvă în mulțimea numerelor iraționale ecuațiile:

**a)** $6 + \sqrt{3}x = 0$; **b)** $3\sqrt{2}x - \sqrt{50} = 0$; **c)** $3 - \sqrt{2}x = 0$; **d)** $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = 0$.

**7** Se consideră ecuația $5x + a = 0$, $a, x \in \mathbb{R}$.
**a)** Determină soluția ecuației pentru $a = -10$. **b)** Dacă $x = 3$ este soluție a ecuației, determină pe $a$.

**8** Determină numărul real $m$ pentru care ecuația:
**a)** $4x + m = 8x + 3$ are soluția $-2$; **b)** $4mx + 5(x - 1) = 7x + 1 - 6m$ are soluția 1.

**9** Rezolvă ecuațiile: **a)** $6x + 3 + 2(x - 4) = 7(x + 2)$; **b)** $2(2x + 1) - 3(3x - 5) = 4x - 19$.

**10** Rezolvă ecuațiile: **a)** $-6(x + 3) - 3(2 - x) = 4 - 2(4 - x)$; **b)** $\sqrt{3}(x-2) + 2\sqrt{3}(x+1) = \sqrt{3}(6+x)$.

**11** Rezolvă ecuațiile:

**a)** $\frac{1}{2} - \frac{x+3}{2} = \frac{2x+7}{10} - 1$; **b)** $\frac{x-1}{2} - \frac{11x-4}{4} = x - 6$; **c)** $\frac{x-1}{3} - \frac{3x+1}{4} = 1 - 2x$.

**12** Rezolvă ecuațiile: **a)** $x\sqrt{2} + x\sqrt{8} + x\sqrt{32} = \sqrt{4} + \sqrt{16} + \sqrt{64}$; **b)** $(4-x)\sqrt{5} - 2\sqrt{5}(x+2) = \sqrt{15}$.

**13** Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:
**a)** $|2x - 1| = 5$; **b)** $3|x - 1| = 6$; **c)** $|x + 2| + |x^2 - 4| = 0$; **d)** $||x + 1| - 2| = 3$.

**14** Rezolvă ecuațiile: **a)** $\left(1-\sqrt{2}\right)x + 3(2x-1) - \left(1-\sqrt{2}\right) = 2(3x-1)$; **b)** $5x - \sqrt{8} = 2(x-1) + 2x - 2\left(\sqrt{5}-1\right)$.

**15** Rezolvă ecuațiile:

**a)** $12 - |2x - 1| = -9$; **b)** $|x - 1| = 2\sqrt{3} + 1$; **c)** $x\left|\sqrt{3}-2\right| - 4 + \sqrt{3} = 2\left(1-\sqrt{3}\right)$.

**16** Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

**a)** $2,(3)x - 0,(3) = 3,(6)x + 1,(2) - \frac{4}{15}$; **b)** $2\sqrt{7} \cdot 4\sqrt{3}x + \sqrt{42} = \sqrt{21} \cdot \left(5x - 2\sqrt{2}\right)$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Numărul 0,(3) este soluție a ecuației $3x + 1 = 0$. **A** **F**

**b)** Soluția ecuației $\sqrt{5} \cdot x + \sqrt{125} = \sqrt{245}$ este numărul $\sqrt{5}$. **A** **F**

**c)** Dacă $\sqrt{3}$ este soluție a ecuației $ax - \sqrt{27} = \sqrt{147}$, atunci $a$ este egal cu 10. **A** **F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**

**a)** Soluția ecuației $\frac{x}{\sqrt{5}} + \sqrt{20} = \sqrt{45}$ este … **1)** $-0,(2)$;

**b)** Ecuațiile $6 \cdot (x + 2) = 10 - 3x$ și $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = 0,8(3) - 1,5$ **2)** 5;

sunt echivalente, deoarece soluția fiecăreia este egală cu … **3)** 3;

**c)** Numărul real $a$ pentru care ecuația $x \cdot (2a - 1) + a - 1 = 3 \cdot (x + a - 1)$, **4)** 1.
cu necunoscuta $x$, are soluția 2 este egal cu …

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

Dacă $x_1$ și $x_2$ sunt soluțiile ecuației $|2 \cdot x - 3| - 2 = 5$, atunci rezultatul calculului $x_1 + x_2$ este $\boxed{\phantom{00}}$.

# LECȚIA 3 Sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute

## Rezolvăm împreună

Rezolvă ecuațiile:

**a)** $4x + 3y = 21, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$;

**b)** $4x + 3y = 21, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

### Ne amintim

- noțiunea de ecuație;
- transformările prin care dintr-o ecuație se obține o ecuație echivalentă;
- etapele rezolvării unei ecuații.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Egalitatea $4x + 3y = 21$ este echivalentă cu egalitatea $4x = 21 - 3y$, adică cu $4x = 3 \cdot (7 - y)$. Deoarece $x$ este număr natural, rezultă că $4x$ este un număr natural par. Prin urmare, $7 - y$ este număr natural par. Rezultă că $y$ este număr impar, $y \le 7$, adică $y$ este element al mulțimii $\{1, 3, 5, 7\}$.

- Dacă $y = 1$, rezultă ecuația $4x = 3 \cdot (7 - 1), x \in \mathbb{N}$, echivalentă cu ecuația $4x = 18, x \in \mathbb{N}$, care nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.
- Dacă $y = 3$, rezultă ecuația $4x = 3 \cdot (7 - 3), x \in \mathbb{N}$, echivalentă cu ecuația $4x = 12, x \in \mathbb{N}$, care are soluția 3.
- Dacă $y = 5$, rezultă ecuația $4x = 3 \cdot (7 - 5), x \in \mathbb{N}$, echivalentă cu ecuația $4x = 6, x \in \mathbb{N}$, care nu are soluții în mulțimea numerelor naturale.
- Dacă $y = 7$, rezultă ecuația $4x = 3 \cdot (7 - 7), x \in \mathbb{N}$, echivalentă cu ecuația $4x = 0, x \in \mathbb{N}$, care are soluția 0.

Egalitățile: $y = 3, x = 3$ și $y = 7, x = 0$ conduc la *perechile ordonate* de numere naturale $(3, 3)$ și $(0, 7)$, corespunzătoare necunoscutelor $x$ și $y$, singurele perechi de numere naturale pentru care egalitatea $4x + 3y = 21, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$, este adevărată. Notând cu $S$ mulțimea soluțiilor ecuației, rezultă că $S = \{(3, 3), (0, 7)\}$.

**b)** Egalitatea $4x + 3y = 21$ este echivalentă cu egalitatea $3y = 21 - 4x$, din care, prin împărțirea fiecărui membru la 3, se obține egalitatea echivalentă $y = \frac{21-4x}{3}$. Prin urmare, în egalitatea din enunț, înlocuind necunoscuta $x$ cu orice număr real $m$ și necunoscuta $y$ cu numărul real $n = \frac{21-4m}{3}$, rezultă egalitatea $4 \cdot m + 3 \cdot \frac{21-4m}{3} = 21$, echivalentă cu $21 = 21$, care este o identitate. Așadar, $4 \cdot m + 3 \cdot \frac{21-4m}{3} = 21$, oricare ar fi numărul real $m$. Notând cu $S$ mulțimea soluțiilor ecuației date, rezultă:

$$S = \left\{(m, n) \mid m \in \mathbb{R} \text{ și } n = \frac{21-4m}{3}\right\} \text{ sau } S = \left\{\left(m, \frac{21-4m}{3}\right) \middle| \; m \in \mathbb{R}\right\}.$$

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

**1.** Cele două ecuații sunt ecuații cu două necunoscute, reprezentate prin literele $x$ și $y$. O soluție a oricăreia dintre cele două ecuații este o pereche ordonată de numere $(x, y)$. Ordinea de scriere a componentelor perechii corespunde ordinii de scriere a necunoscutelor în ecuație.

**2.** Perechea de numere $(0, 7)$ este soluție a ecuației $4x + 3y = 21, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$, deoarece verifică ecuația.

$(0, 7)$ este soluție, deoarece $0 \in \mathbb{N}, 7 \in \mathbb{N}$ și $4 \cdot 0 + 3 \cdot 7 = 21$

$4x + 3y = 21, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$

**3.** Perechea de numere $(7, 0)$ nu este soluție a ecuației $4x + 3y = 21, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$, deoarece nu verifică ecuația.

$(7, 0)$ nu este soluție, deoarece $7 \in \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{N}$, dar $4 \cdot 7 + 3 \cdot 0 \neq 21$

$4x + 3y = 21, x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$

**4.** Perechea de numere $\left(\frac{21}{4}, 0\right)$ este soluție a ecuației $4x + 3y = 21, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, deoarece verifică ecuația.

$\left(\frac{21}{4}, 0\right)$ este soluție, deoarece $\frac{21}{4} \in \mathbb{R}, 0 \in \mathbb{R}$ și $4 \cdot \frac{21}{4} + 3 \cdot 0 = 21$

$4x + 3y = 21, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

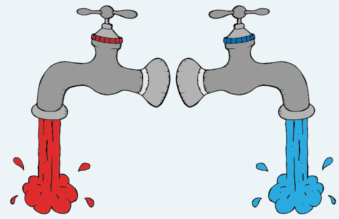
Perechea de numere $\left(\frac{21}{4}, 0\right)$ nu este soluție a ecuației $4x + 3y = 21$, $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, deoarece $x = \frac{21}{4}$ nu este număr natural.

**5.** Despre fiecare dintre cele două ecuații se spune că este ecuație liniară cu două necunoscute. Cele două ecuații diferă doar prin faptul că necunoscutele sunt din mulțimi diferite: pentru prima ecuație $x \in \mathbb{N}$ și $y \in \mathbb{N}$, iar pentru cea de-a doua ecuație $x \in \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{R}$.

**6.** Unele probleme practice conduc la două ecuații liniare cu două necunoscute.

*Exemplu:* Pentru umplerea unui rezervor se folosesc două robinete, unul de apă caldă și unul de apă rece. Dacă robinetul de apă caldă este deschis 3 minute și cel de apă rece este deschis 1 minut, atunci în rezervor vor fi 50 de litri. Dacă robinetul de apă caldă este deschis 1 minut și cel de apă rece este deschis 2 minute, atunci în rezervor vor fi 40 de litri.

Câți litri de apă curg într-un minut din fiecare robinet?



(1) Răspundem la întrebare astfel:
– într-un minut, din robinetul de apă caldă curg $x$ litri de apă;
– într-un minut, din robinetul de apă rece curg $y$ litri de apă.

(2) Cum într-un minut din robinetul de apă caldă curg $x$ litri de apă, rezultă că în 3 minute din robinetul de apă caldă curg $3x$ litri de apă. Deoarece robinetul de apă caldă este deschis 3 minute și cel de apă rece, 1 minut, rezultă că în rezervor sunt $3x + y$ litri de apă și $3x + y = 50$.

(3) Cum într-un minut din robinetul de apă rece curg $y$ litri de apă, rezultă că în 2 minute din robinetul de apă rece curg $2y$ litri de apă. Deoarece robinetul de apă caldă este deschis 1 minut și cel de apă rece, 2 minute, rezultă că în rezervor sunt $x + 2y$ litri de apă și $x + 2y = 40$.

Prin urmare, pentru rezolvarea problemei și exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor din enunț, demersurile (1), (2) și (3) au condus la două ecuații: $3x + y = 50$ și $x + 2y = 40$. Fiecare dintre cele două ecuații este o ecuație liniară cu două necunoscute.

Vom spune că am obținut un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute:

$$\begin{cases} 3x + y = 50 \\ x + 2y = 40 \end{cases}$$

Să remarcăm că finalizarea răspunsului la întrebarea pusă presupune identificarea numerelor reale pozitive $x$ și $y$ care verifică egalitățile anterioare. De exemplu:

- dacă $x = 13$ și $y = 11$, egalitatea $3x + y = 50$ este adevărată, deoarece $3 \cdot 13 + 11 = 50$, dar egalitatea $x + 2y = 40$ nu este verificată, deoarece $13 + 2 \cdot 11 \neq 40$;
- dacă $x = 12$ și $y = 14$, ambele egalități, $3x + y = 50$ și $x + 2y = 40$, sunt adevărate, deoarece: $3 \cdot 12 + 14 = 50$ și $12 + 2 \cdot 14 = 40$.

Pentru sistemul de două ecuații liniare cu două necunoscute $\begin{cases} 3x + y = 50 \\ x + 2y = 40 \end{cases}$:

- perechea ordonată de numere reale (12, 14) este numită soluție a sistemului;
- perechea ordonată de numere reale (13, 11) nu este soluție a sistemului.

## Reține!

- Orice ecuație echivalentă cu o ecuație de forma $ax + by = c$, unde $a$, $b$ și $c$ sunt numere reale, $a \neq 0$, $b \neq 0$, iar $x$ și $y$ sunt necunoscute care pot fi înlocuite cu numere din mulțimi specificate, se numește **ecuație liniară cu două necunoscute**.
  - Numerele $a$, $b$ și $c$ sunt **coeficienții ecuației**; $a$ și $b$ sunt **coeficienții necunoscutelor**, iar numărul $c$ **este termenul liber**.
- O pereche ordonată de numere reale $(x_0, y_0)$ este **soluție a ecuației** $ax + by = c$ dacă $x = x_0$ și $y = y_0$ verifică ecuația (adică dacă egalitatea $ax_0 + by_0 = c$ este adevărată).
- **A rezolva o ecuație** înseamnă a găsi mulțimea soluțiilor acesteia.
- Două ecuații liniare cu două necunoscute sunt **ecuații echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.
- **O pereche de două ecuații liniare cu două necunoscute** se numește **sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute**.

- Un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute este echivalent cu un sistem de forma: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, unde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sunt numere reale date.
  - Numerele reale $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$ sunt **coeficienții sistemului**; $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ sunt **coeficienții necunoscutelor**, iar $c_1$ și $c_2$ sunt **termenii liberi ai sistemului**.
- **A rezolva un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute** înseamnă a găsi soluțiile comune celor două ecuații liniare ale sistemului.
- Două sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute sunt **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.
- **Un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute poate avea una dintre următoarele forme:**
  - ambele ecuații sunt de gradul I și nu au aceeași necunoscută;
  - o ecuație este liniară cu două necunoscute și cealaltă este de gradul I, având ca necunoscută una dintre necunoscutele ecuației liniare;
  - ambele ecuații sunt ecuații liniare cu două necunoscute.

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Se consideră ecuația cu două necunoscute: $x^2 + 3x + 1 = x \cdot (x - 2) - 3y + 5$.

**a)** Arată că ecuația este o ecuație liniară cu două necunoscute.

**b)** Determină mulțimea soluțiilor ecuației.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Deoarece $x \cdot (x - 2) - 3y + 5 = x^2 - 2x - 3y + 5$, rezultă că ecuația dată este echivalentă cu ecuația:

$$x^2 + 3x + 1 = x^2 - 2x - 3y + 5.$$

Trecem, cu semn schimbat, termenul liber din membrul stâng în membrul drept și termenii care conțin necunoscutele, din membrul drept în membrul stâng. Rezultă ecuația $x^2 + 3x - x^2 + 2x + 3y = 5 - 1$, echivalentă cu ecuația $5x + 3y = 4$, care este o ecuație liniară cu două necunoscute.

**b)** Pornind de la ecuația $5x + 3y = 4$, rezultă succesiv următoarele ecuații echivalente:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $5x + 3y = 4$ | $\Leftrightarrow$ | $3y = 4 - 5x$<br>*am trecut cu semn schimbat termenul 5x din membrul stâng în membrul drept* | $\Leftrightarrow$ | $y = \dfrac{4-5x}{3}$<br>*am împărțit la 3 ambii membri ai ecuației $3y = 4 - 5x$* |

Pe scurt, se spune că din ecuația $5x + 3y = 4$ *am scos pe y în funcție de x* și am obținut $y = \dfrac{4-5x}{3}$. Rezultă că, dacă notăm cu $S$ mulțimea soluțiilor ecuației date, aceasta fiind echivalentă cu ecuația $y = \dfrac{4-5x}{3}$, obținem:

$$S = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \text{ și } y = \frac{4-5x}{3} \right\}.$$

### Exercițiul 2

Arată că sistemul $\begin{cases} 3 \cdot (x-2) + y = 5 \\ x \cdot (x-2) - 4y = 3 - x \cdot (1-x) \end{cases}$ este un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute.

Scrie coeficienții sistemului.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Deoarece nu se specifică altfel, se consideră că oricare dintre necunoscutele $x$ și $y$ poate fi înlocuită în ecuațiile respective cu numere din mulțimea numerelor reale.

(1) Ecuația $3 \cdot (x - 2) + y = 5 \Leftrightarrow 3x - 6 + y = 5 \Leftrightarrow 3x + y = 5 + 6 \Leftrightarrow 3x + y = 11$.

(2) Ecuația $x \cdot (x - 2) - 4y = 3 - x \cdot (1 - x) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4y = 3 - x + x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 4y = 3 + x^2 \Leftrightarrow -x - 4y = 3$ (vezi figura alăturată).

$$x^2 \overbrace{-\,2x + x}^{-2x + x = -x} - 4y = 3 + \boxed{x^2}$$

$$-x^2$$

Din (1) și (2) rezultă că sistemul dat este echivalent cu sistemul: $\begin{cases} 3x+y=11 \\ -x-4y=3 \end{cases}$.

Prin urmare, sistemul dat este un *sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute.*
Coeficienții sistemului sunt:
- coeficienții necunoscutei $x$ sunt 3 și –1;
- coeficienții necunoscutei $y$ sunt 1 și –4;
- termenii liberi sunt 11 și 3.

**EXERCIȚIUL 3**

Se consideră sistemul $\begin{cases} \sqrt{2}x=4 \\ -3\sqrt{2}x+y=2 \end{cases}$. Demonstrează că:

**a)** perechea de numere reale $(2\sqrt{2},14)$ este soluție a sistemului;

**b)** dacă perechea de numere reale $(x_0, y_0)$ este soluție a sistemului, atunci $x_0 = 2\sqrt{2}$ și $y_0 = 14$;

**c)** sistemele $\begin{cases} \sqrt{2}x=4 \\ -3\sqrt{2}x+y=2 \end{cases}$ și $\begin{cases} x=2\sqrt{2} \\ y=14 \end{cases}$ sunt sisteme echivalente.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Înlocuind în ecuațiile sistemului pe $x$ cu $2\sqrt{2}$ și pe $y$ cu $14$, rezultă:

$\sqrt{2}x=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4$ și $-3\sqrt{2}x+y=-3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}+14=-12+14=2.$ Prin urmare, deoarece perechea de numere reale $(2\sqrt{2},\ 14)$ verifică ecuațiile sistemului, aceasta este soluție a sistemului.

**b)** Dacă perechea de numere reale $(x_0, y_0)$ este soluție a sistemului, atunci $x = x_0$ și $y = y_0$ verifică ecuațiile sistemului. Rezultă:

$$\sqrt{2}x_0 = 4 \quad (1) \qquad \text{și} \qquad -3\sqrt{2}x_0 + y_0 = 2 \quad (2)$$

Din (1) rezultă că $x_0 = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, de unde $x_0 = 2\sqrt{2}$.

Înlocuind pe $x_0 = 2\sqrt{2}$ în (2), rezultă că $-3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} + y_0 = 2$, adică $-12 + y_0 = 2$ și $y_0 = 14$.

Prin urmare, dacă perechea de numere reale $(x_0, y_0)$ este soluție a sistemului, atunci $x_0 = 2\sqrt{2}$ și $y_0 = 14$.

**c)** Notăm cu $S_1$, respectiv cu $S_2$ mulțimea soluțiilor sistemului (1), respectiv mulțimea soluțiilor sistemului (2). Din a) și b) rezultă că perechea de numere reale $(2\sqrt{2},14)$ este unica soluție a sistemului (1).

Rezultă că $S_1 = \left\{\left(2\sqrt{2},14\right)\right\}$.

Deoarece mulțimea soluțiilor sistemului (2) este $S_2 = \left\{\left(2\sqrt{2},14\right)\right\}$, rezultă că $S_1 = S_2$. Ca urmare, cele două sisteme, având aceeași mulțime de soluții, sunt *sisteme echivalente*.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Se consideră ecuația $2x - 3y = 7$. Precizează care dintre perechile de numere reale: (5, 1), (2, –1), (4,25, 0,5), (–4, –5) sunt soluții ale acestei ecuații.

**2** Se consideră ecuația $x - y = 7$ și perechea de numere $(a, b)$, care este soluție a ecuației. Precizează câte un exemplu de numere $a$ și $b$, știind că:

**a)** $a, b \in \mathbb{N}$; **b)** $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; **c)** $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; **d)** $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**3** Stabilește care dintre perechile de numere: $(\sqrt{2},1)$, $(0,\sqrt{2})$, $(3,0)$, $(6,-\sqrt{2})$, $(9,-2\sqrt{2})$ sunt soluții ale ecuației $x\sqrt{2}+3y=\sqrt{18}$.

**4** **a)** Arată că perechea $(m, 7 - 5m)$ este soluție a ecuației $5x + y = 7$.
**b)** Arată că perechea $(3 + 2m, m)$ este soluție a ecuației $x - 2y = 3$.

**5** Completează spațiile libere, astfel încât fiecare ecuație din primul sistem de ecuații să fie echivalentă cu o ecuație din al doilea sistem de ecuații:

**a)** $\begin{cases} 2x+3y=21 \\ -x+2y=7 \end{cases}$ și $\begin{cases} ...x-6y=... \\ -3x+...y=... \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} -4x+6y=8 \\ 3x-y=-5 \end{cases}$ și $\begin{cases} ...x+...y=4 \\ ...x-5y=... \end{cases}$.

**6** Se consideră ecuația $x\sqrt{3}+y\sqrt{5}=\sqrt{15}$.

**a)** Dacă $x=\sqrt{5}$, determină numărul real $y$. **b)** Dacă $y=\sqrt{3}$, determină numărul real $x$.
**c)** Dacă $x = 0$, determină numărul real $y$. **d)** Dacă $y = 0$, determină numărul real $x$.

**7** Se consideră ecuațiile: $3x + y = 6$, $-x + 3y = 9$, $5x - 2y = 10$ și $2x + 3y = 12$.
**a)** În fiecare dintre ecuații, exprimă necunoscuta $y$ în funcție de $x$ și scrie mulțimea soluțiilor ecuației.
**b)** În fiecare dintre ecuații, exprimă necunoscuta $x$ în funcție de $y$ și scrie mulțimea soluțiilor ecuației.
*Model*: Pentru ecuația $2x + 3y = 12$, rezultă:

a) $3y = 12 - 2x$, $y=\dfrac{12-2x}{3}$ și $S=\left\{(x,y)\,\middle|\,x\in\mathbb{R} \text{ și } y=\dfrac{12-2x}{3}\right\}$ sau $S=\left\{\left(x,\dfrac{12-2x}{3}\right)\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\right\}$;

b) $2x = 12 - 3y$, $x=\dfrac{12-3y}{2}$ și $S=\left\{(x,y)\,\middle|\,x=\dfrac{12-3y}{2} \text{ și } y\in\mathbb{R}\right\}$ sau $S=\left\{\left(\dfrac{12-3y}{2},y\right)\,\middle|\,y\in\mathbb{R}\right\}$.

**8** Verifică dacă sistemele următoare sunt echivalente:

**a)** $\begin{cases} x=3\sqrt{2} \\ y=7 \end{cases}$ și $\begin{cases} 3x+\sqrt{2}y=16\sqrt{2} \\ -2x+3\sqrt{2}y=15\sqrt{2} \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} -x+y=1 \\ 4x+3y=24 \end{cases}$ și $\begin{cases} \sqrt{2}x-\sqrt{2}y=-\sqrt{2} \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=2 \end{cases}$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**
**a)** Perechea de numere întregi $(-2, 3)$ este soluție a ecuației $2x + y = 1$. **A F**
**b)** Perechea de numere reale $(-\sqrt{2},2\sqrt{2})$ este soluție a ecuației $-x + 3y = 7\sqrt{2}$. **A F**
**c)** Perechea de numere reale $(3, -1)$ este soluție a sistemului de ecuații $\begin{cases} 4x+y=11 \\ 3x+5y=4 \end{cases}$. **A F**

**2** **Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.** **4,5 puncte**

**a)** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+3y=7 \\ ax+y=-5 \end{cases}$. Dacă sistemul admite soluția $(-2, 3)$, atunci numărul real $a$ este egal cu:
**A.** 5; **B.** 4; **C.** 6; **D.** 3.

**b)** Dacă perechea $(-1, 2)$ este soluție a sistemului de ecuații $\begin{cases} x-3y=a \\ -2x+y=b \end{cases}$, atunci $a + b$ este egal cu:
**A.** –3; **B.** –11; **C.** 11; **D.** 3.

**c)** Sistemul de ecuații $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ este echivalent cu sistemul de ecuații:

**A.** $\begin{cases} x+1{,}5y=-0{,}5\sqrt{2} \\ 2x-10y=5\sqrt{2} \end{cases}$; **B.** $\begin{cases} 3x-15y=18\sqrt{2} \\ -2x+3y=\sqrt{2} \end{cases}$; **C.** $\begin{cases} 2x+3y=-\sqrt{2} \\ -x+5y=-6\sqrt{2} \end{cases}$; **D.** $\begin{cases} \sqrt{3}x+3\sqrt{3}y=-2\sqrt{6} \\ 2\sqrt{5}x-\sqrt{5}y=\sqrt{10} \end{cases}$.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

Mulțimea soluțiilor sistemului de ecuații $\begin{cases} x+y=-1 \\ 3x+3y=3 \end{cases}$ este $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 4 Rezolvarea sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute. Metoda substituției și metoda reducerii

## Ne amintim

- Un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute este echivalent cu un sistem de forma: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, unde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sunt numere reale date.
- Sunt posibile următoarele situații:
  - ambele ecuații sunt de gradul I și nu au aceeași necunoscută;
  - o ecuație este liniară cu două necunoscute și cealaltă este de gradul I, având ca necunoscută una dintre necunoscutele ecuației liniare;
  - ambele ecuații sunt liniare cu două necunoscute.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute poate avea una dintre următoarele forme:

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{cases} ax = b \\ cy = d \end{cases}$ unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, c \neq 0$ | $\begin{cases} ax = b \\ cx + dy = e \end{cases}$ sau $\begin{cases} px + qy = r \\ sy = t \end{cases}$ unde $a, b, c, d, e$ și $p, q, r, s, t \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ și $p \neq 0, q \neq 0, s \neq 0$ | $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ unde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$ |

Observăm că necunoscutele fiecărui sistem au coeficienții numere reale nenule. În caz contrar, primul sistem nu mai este sistem cu două necunoscute, iar următoarele două sisteme ori nu mai sunt sisteme cu două necunoscute, ori se identifică cu primul sistem. În cazul ultimului sistem, dacă unul dintre coeficienții necunoscutelor este nul, sistemul se identifică cu unul dintre primele trei sisteme.

Cum rezolvăm aceste sisteme?

**1.** Observăm cu ușurință că soluția sistemului $\begin{cases} ax = b \\ cy = d \end{cases}$ este perechea ordonată de numere reale $\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right)$.

**2.** Arătăm că sistemul (1) $\begin{cases} ax = b \\ cx + dy = e \end{cases}$ este echivalent cu sistemul (2) $\begin{cases} x = \frac{b}{a} \\ c \cdot \frac{b}{a} + dy = e \end{cases}$.

Într-adevăr, împărțind ambii membri ai ecuației $ax = b$ la $a \neq 0$, rezultă că $x = \frac{b}{a}$. Înlocuind pe $x = \frac{b}{a}$ în ecuația $cx + dy = e$, rezultă ecuația $c \cdot \frac{b}{a} + dy = e$. Prin urmare, din sistemul (1) rezultă sistemul (2).

Arătăm acum că din sistemul (2) rezultă sistemul (1). Într-adevăr, înmulțind cu $a \neq 0$ ambii membri ai ecuației $x = \frac{b}{a}$, rezultă ecuația $ax = b$. Înlocuind pe $b$ cu $ax$ în ecuația $c \cdot \frac{b}{a} + dy = e$, rezultă ecuația $c \cdot \frac{ax}{a} + dy = e$, adică ecuația $cx + dy = e$. Prin urmare, din sistemul (2) rezultă sistemul (1).

Deoarece cele două sisteme se obțin unul din celălalt, rezultă că acestea sunt sisteme echivalente.

Așadar: dacă scoatem o necunoscută dintr-o ecuație a unui sistem dat și o înlocuim (substituim) în cealaltă ecuație a sistemului, obținem un sistem echivalent cu sistemul dat.

*Exemple:*

a) $\begin{cases} ax = b \\ cx + dy = e \end{cases} \Leftrightarrow$ a') $\begin{cases} x = \frac{b}{a} \\ c \cdot \frac{b}{a} + dy = e \end{cases}$;  b) $\begin{cases} ax + by = e \\ cy = d \end{cases} \Leftrightarrow$ b') $\begin{cases} ax + b \cdot \frac{d}{c} = e \\ y = \frac{d}{c} \end{cases}$.

Procedeul este cunoscut sub denumirea de metoda substituției.

Sistemele a') și b') se rezolvă ușor, deoarece fiecare ecuație a sistemului este o ecuație de gradul I.

## Rezolvăm împreună

### EXERCIȚIUL 1

Se consideră sistemul $\begin{cases} 6x+4y=16 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$.

**a)** Demonstrează că ecuațiile sistemului au coeficienții proporționali.
**b)** Demonstrează că ecuațiile sistemului sunt echivalente.
**c)** Rezolvă sistemul.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Coeficienții ecuației $6x + 4y = 16$ sunt numerele 6, 4, 16, iar coeficienții ecuației $3x + 2y = 8$ sunt numerele 3, 2, 8. Deoarece $\frac{6}{3}=\frac{4}{2}=\frac{16}{8}=2$, rezultă că ecuațiile sistemului au coeficienții proporționali.

**b)** Se observă că:
– a doua ecuație a sistemului rezultă din prima ecuație, împărțind la 2 membrii primei ecuații;
– prima ecuație a sistemului rezultă din a doua ecuație, înmulțind cu 2 membrii ecuației a doua.
Prin urmare, cele două ecuații ale sistemului sunt echivalente: $6x + 4y = 16 \Leftrightarrow 3x + 2y = 8$.

**c)** Dacă din ecuația $3x + 2y = 8$ scoatem pe $y$ în funcție de $x$, rezultă că ecuația dată este echivalentă cu ecuația $y=\frac{8-3x}{2}$. Prin urmare, ecuațiile $6x + 4y = 16$, $3x + 2y = 8$ și $y=\frac{8-3x}{2}$ sunt echivalente. Rezolvarea sistemului $\begin{cases} 6x+4y=16 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ se reduce la rezolvarea uneia dintre ecuațiile echivalente. Cum mulțimea soluțiilor ecuației $y=\frac{8-3x}{2}$ este: $S=\left\{(x,y) \middle| x\in\mathbb{R} \text{ și } y=\frac{8-3x}{2}\right\}$, rezultă că mulțimea soluțiilor sistemului dat este mulțimea $S$, care este o mulțime infinită.

### EXERCIȚIUL 2


Se consideră sistemul $\begin{cases} 15x+10y=12 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$.

**a)** Demonstrează că ecuațiile sistemului au coeficienții necunoscutelor proporționali.
**b)** Demonstrează că coeficienții ecuațiilor sistemului nu sunt proporționali.
**c)** Rezolvă sistemul.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Coeficienții necunoscutelor ecuației $15x + 10y = 12$ sunt numerele 15 și 10, iar numerele 3 și 2 sunt coeficienții necunoscutelor ecuației $3x+2y=4$. Deoarece $\frac{15}{3}=\frac{10}{2}=5$, rezultă că ecuațiile sistemului au coeficienții necunoscutelor proporționali.

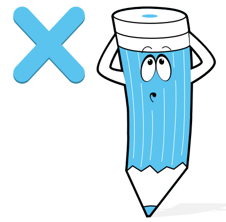
**b)** Coeficienții ecuației $15x + 10y = 12$ sunt numerele 15, 10, 12, iar numerele 3, 2, 4 sunt coeficienții ecuației $3x + 2y = 4$. Deoarece $\frac{15}{3}=\frac{10}{2}=5\neq\frac{12}{4}=3$, rezultă că ecuațiile sistemului nu au coeficienții proporționali.

**c)** Se observă că, din a doua ecuație a sistemului, prin înmulțire cu 5 rezultă ecuația echivalentă $15x + 10y = 20$.
Prin urmare, sistemele: $\begin{cases} 15x+10y=12 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ și $\begin{cases} 15x+10y=12 \\ 15x+10y=20 \end{cases}$ sunt sisteme echivalente.

Din ultimele două ecuații și din tranzitivitatea relației de egalitate rezultă că $12 = 20$, ceea ce este fals. Așadar, sistemul dat nu are soluții, adică mulțimea soluțiilor sistemului este mulțimea vidă, $S=\varnothing$.

## EXERCIȚIUL 3

Se consideră sistemele: (1) $\begin{cases}3x+2y=8\\-2x+5y=1\end{cases}$ și (2) $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$.



Arată că:

**a)** sistemul (1) nu are coeficienții necunoscutelor proporționali;

**b)** sistemul (1) se obține din sistemul (2);

**c)** sistemul (2) se obține din sistemul (1).

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Coeficienții necunoscutelor ecuației $3x + 2y = 8$ sunt numerele 3 și 2, iar numerele –2 și 5 sunt coeficienții necunoscutelor ecuației $-2x + 5y = 1$. Deoarece $\frac{3}{-2} \neq \frac{2}{5}$, rezultă că ecuațiile sistemului nu au coeficienții necunoscutelor proporționali.

| | |
|---|---|
| **b)** Înmulțind cu 3 fiecare membru al ecuației $x = 2$, rezultă ecuația $3x = 6$. Înmulțind cu 2 fiecare membru al ecuației $y = 1$, rezultă ecuația $2y = 2$. | Adunând ecuațiile $3x = 6$ și $2y = 2$ membru cu membru, rezultă ecuația $3x + 2y = 8$. |
| Înmulțind cu –2 fiecare membru al ecuației $x = 2$, rezultă ecuația $-2x = -4$. Înmulțind cu 5 fiecare membru al ecuației $y = 1$, rezultă ecuația $5y = 5$. | Adunând ecuațiile $-2x = -4$ și $5y = 5$ membru cu membru, rezultă ecuația $-2x + 5y = 1$. |
| Prin urmare, din sistemul (2) $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ se obține sistemul (1) $\begin{cases}3x+2y=8\\-2x+5y=1\end{cases}$. | |

**c)** Înmulțim prima ecuație a sistemului (1) cu coeficientul necunoscutei $y$ din ecuația a doua și a doua ecuație a sistemului (1), cu opusul coeficientului necunoscutei $y$ din prima ecuație, apoi adunăm ecuațiile rezultate și obținem ecuația $11x = 22$, de unde $x = 2$. Formal se scrie astfel:

$$\begin{cases}3x+2y=8 & \big|\cdot 5\\-2x+5y=1 & \big|\cdot(-2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}15x+10y=40\\4x-10y=-2\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 19x=38 \Rightarrow x=2.$$

Se spune că ecuația $x = 2$ se obține din cele două ecuații ale sistemului prin reducerea lui $y$. La fel, prin reducerea lui $x$ din cele două ecuații ale sistemului, rezultă ecuația $y = 1$, după cum urmează: înmulțim prima ecuație a sistemului (1) cu coeficientul necunoscutei $x$ din ecuația a doua și înmulțim a doua ecuație a sistemului (1) cu opusul coeficientului necunoscutei $x$ din prima ecuație, apoi adunăm ecuațiile rezultate:

$$\begin{cases}3x+2y=8 & \big|\cdot(-2)\\-2x+5y=1 & \big|\cdot(-3)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-6x-4y=-16\\6x-15y=-3\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} -19y=-19 \Rightarrow y=1.$$

Prin urmare, din sistemul de ecuații (1) a rezultat sistemul de ecuații (2). Deoarece sistemul (1) se obține din sistemul (2) și sistemul (2) se obține din sistemul (1), sistemele (1) și (2) sunt sisteme echivalente. Sistemele fiind echivalente și sistemul (2) având soluția (2, 1), rezultă că soluția sistemului (1) este aceeași. Procedeul folosit pentru determinarea soluției sistemului (1) este cunoscut sub denumirea de metoda reducerii.

### Reține!

- Folosind regulile de transformare a ecuațiilor în ecuații echivalente, se obține sistemul echivalent:

$$(*)\ \begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases},$$

unde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sunt numere reale, necunoscutele fiind notate cu $x$ și $y$.

- **Rezolvarea sistemului (*)** se face cu **metoda reducerii** sau **metoda substituției** sau combinând cele două metode.
- Notând cu $S$ mulțimea soluțiilor sistemului, rezultă:
  - $S$ are un singur element și sistemul are soluție unică;
  - $S$ este o mulțime infinită și sistemul are o infinitate de soluții;
  - $S$ nu are niciun element și sistemul nu are soluție, adică $S = \varnothing$.

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Demonstrează că mulțimea soluțiilor sistemului $\begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{2}}x+\sqrt{3}y=\sqrt{2}x+8 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x+y=-10 \end{cases}$ este mulțimea vidă.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):* Transformăm ecuațiile sistemului în ecuații echivalente.

- Prin înmulțirea fiecărui membru al primei ecuații a sistemului cu numărul $\sqrt{2}$, se obține ecuația echivalentă $4x+\sqrt{6}y=2x+8\sqrt{2}$. Formal se scrie: $\dfrac{4}{\sqrt{2}}x+\sqrt{3}y=\sqrt{2}x+8\,\Big|\left(\cdot\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow 4x+\sqrt{6}y=2x+8\sqrt{2}$.
- Prin trecerea cu semn schimbat a termenului care conține necunoscuta $x$ din membrul drept în membrul stâng, din ecuația $4x+\sqrt{6}y=2x+8\sqrt{2}$ se obține ecuația $4x-2x+\sqrt{6}y=8\sqrt{2}$, echivalentă cu ecuația $2x+\sqrt{6}y=8\sqrt{2}$.
- Prin înmulțirea fiecărui membru al celei de-a doua ecuații cu numărul $-\sqrt{6}$, se obține ecuația: $-\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x-\sqrt{6}y=10\sqrt{6}$, care este echivalentă cu ecuația $-2x-\sqrt{6}y=10\sqrt{6}$.

Prin urmare, sistemul dat este echivalent cu sistemul $\begin{cases} 2x+\sqrt{6}y=8\sqrt{2} \\ -2x-\sqrt{6}y=10\sqrt{6} \end{cases}$.

Adunând membru cu membru ecuațiile sistemului, rezultă egalitatea falsă $0=8\sqrt{2}+10\sqrt{6}$, ceea ce demonstrează că mulțimea soluțiilor sistemului este mulțimea vidă.

### Exercițiul 2

Rezolvă sistemele: **a)** $\begin{cases} 3x+y=50 \\ x+2y=40 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x+3y=19 \\ 3x-4y=3 \end{cases}$.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):* Urmărim rezolvarea celor două sisteme și reținem etapele de rezolvare.

**Metoda substituției**

| **Rezolvarea sistemului** $\begin{cases} 3x+y=50 \\ x+2y=40 \end{cases}$ | | **Etapele de rezolvare:** | | **Rezolvarea sistemului** $\begin{cases} 2x+3y=19 \\ 3x-4y=3 \end{cases}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x+2y=40$<br>$x=40-2y$ | ← | **1)** dintr-o ecuație a sistemului **se scoate** o necunoscută, în funcție de cealaltă | → | $2x+3y=19$<br>$x=\dfrac{-3y+19}{2}$ |
| $3(40-2y)+y=50$<br>$120-6y+y=50$<br>$120-5y=50$<br>$-5y=50-120$<br>$-5y=-70$<br>$y=14$ | ← | **2)** se înlocuiește în cealaltă ecuație a sistemului și se obține o ecuație cu o necunoscută, care se rezolvă | → | $3\cdot\dfrac{-3y+19}{2}-4y=3\,\Big\|\cdot 2$<br>$-9y+57-8y=6$<br>$-17y=6-57$<br>$-17y=-51$<br>$y=3$ |
| $y=14$ și $x=40-2y$<br>$\Rightarrow x=12$ și $y=14$ | ← | **3)** având **valoarea** unei necunoscute, rezultă și valoarea celeilalte | → | $y=3$ și $x=\dfrac{-3y+19}{2}$<br>$\Rightarrow x=5$ și $y=3$ |
| soluția sistemului este perechea (12, 14) | ← | **4)** se finalizează, precizându-se soluția sistemului | → | soluția sistemului este perechea (5, 3) |

### Metoda reducerii

| Rezolvarea sistemului $\begin{cases} 3x+y=50 \\ x+2y=40 \end{cases}$ | Etapele de rezolvare: | Rezolvarea sistemului $\begin{cases} 2x+3y=19 \\ 3x-4y=3 \end{cases}$ |
|---|---|---|
| $\left\{\begin{array}{l\|l} 3x+y=50 & -1 \\ x+2y=40 & 3 \end{array}\right.$ <br> $\begin{cases} -3x-y=-50 \\ 3x+6y=120 \end{cases}$ | **I. Reducerea lui *x*** <br> **1)** se înmulțește prima ecuație cu opusul coeficientului lui *x* din a doua ecuație, iar a doua ecuație se înmulțește cu coeficientul lui *x* din prima ecuație; rezultă un nou sistem, echivalent cu cel dat | $\left\{\begin{array}{l\|l} 2x+3y=19 & -3 \\ 3x-4y=3 & 2 \end{array}\right.$ <br> $\begin{cases} -6x-9y=-57 \\ 6x-8y=6 \end{cases}$ |
| $\left\{\begin{array}{l\|l} -3x-y=-50 & (+) \\ 3x+6y=120 & \end{array}\right.$ <br> $5y=70$ | **2)** se adună membru cu membru ecuațiile noului sistem; rezultă o ecuație cu necunoscuta *y* | $\left\{\begin{array}{l\|l} -6x-9y=-57 & (+) \\ 6x-8y=6 & \end{array}\right.$ <br> $-17y=-51$ |
| $y=14$ | **3)** se rezolvă ecuația cu necunoscuta *y* | $y=3$ |
| $\left\{\begin{array}{l\|l} 3x+y=50 & -2 \\ x+2y=40 & 1 \end{array}\right.$ <br> $\begin{cases} -6x-2y=-100 \\ x+2y=40 \end{cases}$ | **II. Reducerea lui *y*** <br> **1)** se înmulțește prima ecuație cu opusul coeficientului lui *y* din a doua ecuație, iar ecuația a doua se înmulțește cu coeficientul lui *y* din prima ecuație; rezultă un nou sistem, echivalent cu cel dat | $\left\{\begin{array}{l\|l} 2x+3y=19 & 4 \\ 3x-4y=3 & 3 \end{array}\right.$ <br> $\begin{cases} 8x+12y=76 \\ 9x-12y=9 \end{cases}$ |
| $\left\{\begin{array}{l\|l} -6x-2y=-100 & (+) \\ x+2y=40 & \end{array}\right.$ <br> $-5x=-60$ | **2)** se adună membru cu membru ecuațiile noului sistem; rezultă o ecuație cu necunoscuta *x* | $\left\{\begin{array}{l\|l} 8x+12y=76 & (+) \\ 9x-12y=9 & \end{array}\right.$ <br> $17x=85$ |
| $x=12$ | **3)** se rezolvă ecuația cu necunoscuta *x* | $x=5$ |
| soluția sistemului este perechea (12, 14) | **4)** se finalizează, precizându-se soluția sistemului | soluția sistemului este perechea (5, 3) |

**EXERCIȚIUL 3**

Se consideră sistemele: (1) $\begin{cases} x-y-1=4\cdot(x+y+1)-3 \\ 4x+2y+2=x-3y \end{cases}$ și (2) $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x+\sqrt{6}y=2\sqrt{2} \end{cases}$.

**a)** Demonstrează că sistemul (1) are o infinitate de soluții și scrie mulțimea soluțiilor sistemului.
**b)** Demonstrează că mulțimea soluțiilor sistemului (2) este mulțimea vidă.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Transformăm prima ecuație a sistemului (1) în ecuații echivalente:
- desființând paranteza din membrul drept al ecuației, succesiv obținem:

$$x-y-1=4\cdot(x+y+1)-3 \Leftrightarrow x-y-1=4x+4y+4-3$$
$$\Leftrightarrow x-y-1=4x+4y+1 \quad (3);$$

- prin trecerea cu semn schimbat a termenilor care conțin necunoscutele din membrul drept în membrul stâng și prin trecerea cu semn schimbat a termenilor liberi din membrul stâng în membrul drept în ecuația (3), se obține ecuația echivalentă $-3x-5y=2$ (4);
- prin înmulțirea fiecărui membru al ecuației (4) cu $-1$, se obține ecuația echivalentă $3x+5y=-2$.

Transformăm a doua ecuație a sistemului (1) în ecuații echivalente:
- prin trecerea cu semn schimbat a termenilor care conțin necunoscutele din membrul drept în membrul stâng și prin trecerea cu semn schimbat a termenilor liberi din membrul stâng în membrul drept, din ecuația a doua a sistemului (1), se obține ecuația echivalentă $4x+2y-x+3y=-2$, care este echivalentă cu ecuația $3x+5y=-2$.

Deoarece fiecare ecuație a sistemului (1) este echivalentă cu ecuația $3x + 5y = -2$, rezultă că sistemul (1) are o infinitate de soluții. Cum $3x + 5y = -2 \Leftrightarrow y = -\frac{3x+2}{5}$, rezultă că mulțimea soluțiilor sistemului este $S = \left\{(x, y) \middle| x \in \mathbb{R} \text{ și } y = -\frac{3x+2}{5}\right\}$.

**b)** Mulțimea soluțiilor sistemului (2) este mulțimea vidă, deoarece coeficienții necunoscutelor din cele două ecuații sunt proporționali, adică $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$, iar coeficienții celor două ecuații nu sunt proporționali, adică $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \neq \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Rezolvă prin metoda substituției următoarele sisteme:

**a)** $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$;

**d)** $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + \sqrt{3}y + 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 0 \end{cases}$; **e)** $\begin{cases} x - 4y = -7 \\ 5x - 7y = -9 \end{cases}$; **f)** $\begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 7x + 20y + 9 = 0 \end{cases}$.

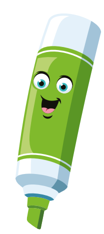
**2** Rezolvă prin metoda reducerii sistemele următoare:

**a)** $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ -4x + 9y = 15 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 5x + 2y = -9 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} -x + y = 4 \\ 5x - y = -16 \end{cases}$.

**3** Se consideră sistemele: (1) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 2 \\ \sqrt{8}x - \sqrt{12}y = 6 \end{cases}$; (3) $\begin{cases} 5x + 6y = 11 \\ \sqrt{12}x + \sqrt{3}y = 3\sqrt{3} \end{cases}$.

**a)** Stabilește numărul de soluții ale fiecărui sistem, fără a-l rezolva.
**b)** Rezolvă fiecare sistem cu metoda reducerii.
**c)** Rezolvă fiecare sistem cu metoda substituției.

**4** Rezolvă sistemele:



**a)** $\begin{cases} x\sqrt{2} + 2y = 4 \\ -2x\sqrt{2} + 3y = -1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 0{,}2x + y - 3 = 0 \\ 2x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 6x - 5y = 0 \\ x - y = \frac{1}{15} \end{cases}$;

**d)** $\begin{cases} -\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y = 0 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$; **e)** $\begin{cases} \frac{1}{x+3} - \frac{1}{y-2} = 0 \\ 3x - 2y + 20 = 0 \end{cases}$; **f)** $\begin{cases} x + y = 32 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{5} \end{cases}$.

**5** Se consideră sistemele: (1) $\begin{cases} 5x + 5y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} -x + 5y = 1 \\ x - 5y = -1 \end{cases}$; (3) $\begin{cases} 3x + 5y = 11 \\ x - y = -1 \end{cases}$.

**a)** Demonstrează că sistemul (1) nu are soluții reale.
**b)** Demonstrează că sistemul (2) are o infinitate de soluții reale.
**c)** Demonstrează că sistemul (3) are o singură soluție.

**6** Pe mulțimea numerelor reale se consideră sistemul: $\begin{cases} -2x + 3y = -8 \\ px + 6y = q \end{cases}$, unde $p$ și $q$ sunt numere reale.

**a)** Rezolvă sistemul pentru $p = 2$ și $q = 1$.
**b)** Demonstrează că, dacă $p = -4$ și $q = -16$, atunci sistemul are o infinitate de soluții.
**c)** Demonstrează că, dacă $p = -4$ și $q \neq -16$, atunci sistemul nu are soluții.
**d)** Rezolvă sistemul pentru $p \neq -4$ și $q$ – un număr real oarecare.

**7** Rezolvă sistemele:

**a)** $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ -3x+y=-7 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+y\sqrt{2}=2\sqrt{2} \\ 3x+y\sqrt{2}=4\sqrt{2} \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2,1(6)x+0,8(3)y=3 \\ 0,(6)x+1,(3)y=2 \end{cases}$.

**8** Rezolvă sistemele:

**a)** $\begin{cases} 2|x|+5|y|=7 \\ 7|x|+3|y|=10 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{y}=11 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=7 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{x}+\dfrac{3\sqrt{2}}{y}=-12 \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{y}=6 \end{cases}$.

## Portofoliu

Se consideră sistemul $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, unde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ și $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$.

Demonstrează că, dacă sistemul are două soluții distincte, atunci are o infinitate de soluții.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Soluția sistemului de două ecuații liniare cu două necunoscute $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$ este perechea $(x, y) = (2, 3)$. **A** **F**

**b)** Soluția sistemului de două ecuații liniare cu două necunoscute $\begin{cases} 0,5x-y=21 \\ 0,5x+y=-1 \end{cases}$ este perechea $(x, y) = (20, -11)$. **A** **F**

**c)** Soluția sistemului de două ecuații liniare cu două necunoscute $\begin{cases} x-\sqrt{2}y=-3 \\ 11x+\sqrt{8}y=45 \end{cases}$ este perechea $(x, y) = (3,\ 3\sqrt{2})$. **A** **F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute aflat în coloana din stânga cu soluția corespunzătoare aflată în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**

**a)** $\begin{cases} 7x-y=-15 \\ -3x+y=7 \end{cases}$ — **1)** $(2, 4)$;

**b)** $\begin{cases} 2x+3=3y-5 \\ 3\cdot(x-y)=x+y-12 \end{cases}$ — **2)** $(-3\sqrt{5}, 3\sqrt{2})$;

**c)** $\begin{cases} \sqrt{5}x+\sqrt{2}y=-9 \\ 3\sqrt{5}x+\sqrt{2}y=-39 \end{cases}$ — **3)** $(2\sqrt{5}, -3\sqrt{2})$;

**4)** $(-2, 1)$.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

Se consideră sistemele de două ecuații liniare cu două necunoscute $\begin{cases} x+y=-3 \\ 3x-2y=+1 \end{cases}$ și, respectiv, $\begin{cases} ax+2y=-1 \\ x-by=-1 \end{cases}$. Dacă cele două sisteme sunt echivalente, atunci $2a + b$ este egal cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 5 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații

## Ne amintim

- Etapele rezolvării unei probleme cu ajutorul ecuațiilor:

**1)** alegerea necunoscutei; **2)** obținerea ecuației; **3)** rezolvarea ecuației;
**4)** interpretarea rezultatului (formularea răspunsului la cerințele problemei și eventual verificarea răspunsului).

Multe situații din viața curentă, din științele naturii, din tehnologie, din economie sau chiar din matematică exprimate în limbaj curent se pot traduce în **limbaj algebric**.

Iată **un exemplu** foarte simplu: *„Dacă la 6 se adună de două ori un număr natural, se obține același rezultat ca atunci când se scade acest număr din 15”*. Înlocuind numărul natural cu litera $x$, textul citat, exprimat în limbaj curent, se traduce în limbaj matematic astfel: „$6 + 2x = 15 - x$, $x \in \mathbb{N}$”. A rezultat astfel o ecuație a cărei rezolvare permite determinarea numărului natural.

Un **alt exemplu** se referă la *viața lui Diofant*, un celebru matematician grec, care a trăit în secolul al III-lea î.H. în Alexandria, considerat de mulți autori ca fiind *părintele algebrei* (ramură a matematicii). Nu se cunosc prea multe date despre viața sa. Dar într-o *antologie* greacă există un *epitaf* în versuri, care exprimă în limbaj obișnuit datele vieții lui Diofant.

**Dicționar:**
*antologie* = culegere de lucrări reprezentative, alese din una sau din mai multe opere ale unui autor sau ale mai multor autori.
*epitaf* = inscripție funerară, în versuri sau în proză, cuprinzând elogiul defunctului sau o sentință morală.

## Rezolvăm împreună

### Problema 1

**a)** Observă tabelul alăturat. Ce scot în evidență cele două coloane ale tabelului?

**b)** Rezolvă ecuația:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

și determină vârsta lui Diofant.

**c)** Copiază și completează textul de mai jos cu datele privitoare la biografia lui Diofant.

*„Diofant a copilărit până la … ani. S-a însurat la vârsta de … ani. După … ani s-a născut fiul său. La nașterea fiului său, Diofant avea vârsta de … ani, iar la moartea fiului avea … ani. Diofant a murit la vârsta de … ani, iar fiul său a murit la vârsta de …”*

| Epitaf – în limbajul specific limbii vorbite | Epitaf – în limbaj algebric |
|---|---|
| Călătorule! Aici odihnesc osemintele<br>Unui om bun care **a trăit**<br>O viață lungă și plină de virtuți. | Diofant a trăit $x$ ani |
| **Copilăria lui a ținut** o șesime de viață. | $\frac{1}{6} \cdot x = \frac{x}{6}$ |
| Apoi a mai trăit o doisprezecime<br>Până când **s-a însurat** cu o femeie<br>Care nu **i-a dăruit copii**, decât **după ce**<br>**A mai trecut** a șaptea parte din viață,<br>**Plus încă** 5 ani. | $\frac{x}{6} + \frac{1}{12} \cdot x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12}$<br>$\left(\frac{x}{6} + \frac{x}{12}\right) + \frac{1}{7} \cdot x + 5 = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5$ |
| Iar fiului său soarta i-a hărăzit<br>Să trăiască doar jumătate din viața părintelui. | $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2}$ |
| În mâhnire adâncă **a murit** bătrânul,<br>Supraviețuind cu patru ani fiului său.<br>.................................................................. | $\left(\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2}\right) + 4$ |
| Călătorule! Știi câți ani am eu<br>În această zi când îmi sfârșesc viața?<br>(sursa: internet, Wikipedia, enciclopedie liberă) | $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$ |

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Prima coloană a tabelului pune în evidență epitaful în **limbajul specific limbii vorbite**. A doua coloană a tabelului pune în evidență epitaful în **limbaj algebric**. Prin „traducerea" epitafului în limbajul algebric a rezultat ecuația: $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$.

**b)** Înmulțind ambii membri ai unei ecuații cu un număr nenul, obținem o ecuație echivalentă cu ecuația dată. Pentru eliminarea numitorilor ecuației din enunț, vom înmulți ambii membri ai ecuației cu cel mai mic multiplu comun al numerelor 6, 12, 7 și 2, care este 84. Succesiv, obținem ecuații echivalente, după cum urmează:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 \Leftrightarrow 84x = 14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 \Leftrightarrow 84x = 75x + 756 \Leftrightarrow 9x = 756 \Leftrightarrow x = 84.$$

Prin urmare, *Diofant a trăit 84 de ani*.

**c)** Prin înlocuirea lui $x$ cu 84, a doua coloană a tabelului ne permite să formulăm date privitoare la biografia lui Diofant:

„Diofant a copilărit până la $\left(\frac{x}{6} =\right)$ 14 ani. S-a însurat la vârsta de $\left(\frac{x}{6} + \frac{x}{12} =\right)$ 21 de ani. După $\left(\frac{x}{7} + 5 =\right)$ 17 ani s-a născut fiul său. La nașterea fiului său, Diofant avea vârsta de $\left(\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 =\right)$ 38 de ani, iar la moartea fiului avea $\left(\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} =\right)$ 80 de ani. Diofant a murit la vârsta de ($x =$) 84 de ani, iar fiul său a murit la vârsta de $\left(\frac{x}{2} =\right)$ 42 de ani."

**Observație:** Rezolvarea punctului c) înseamnă comunicarea și verificarea rezultatului obținut, inclusiv prin interpretarea unor rezultate parțiale conform datelor din enunț, formulat în limbajul vorbirii curente.

## PROBLEMA 2

La o uzină metalurgică, prin topire se amestecă 20 de tone de oțel cu 5 tone de fontă. Oțelul are un conținut de 0,5% carbon, iar conținutul în carbon al fontei este de 5%. Ce procent de carbon are amestecul?

*Fig. 1*
*(topirea metalelor)*

## PROBLEMA 3

Pentru a evita înghețarea apei în blocul motor, în sistemul de răcire al automobilului se amestecă apa cu un lichid numit *antigel*, cu densitatea de 113,5 grame pe litru. Dacă amestecul are 102,7 grame pe litru, atunci se evită înghețul până la –10°C. Apa având densitatea de 100 de grame pe litru, câți litri de apă și câți litri de antigel sunt necesari pentru a obține 100 de litri de amestec, necesar pentru a evita înghețarea blocului motor la temperatura de –10°C?

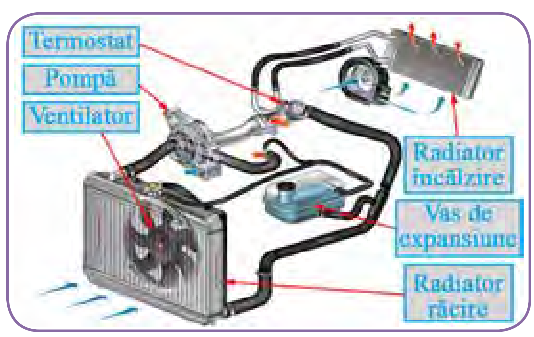



*Fig. 2*
*(sistemul pentru răcirea motorului automobilului)*

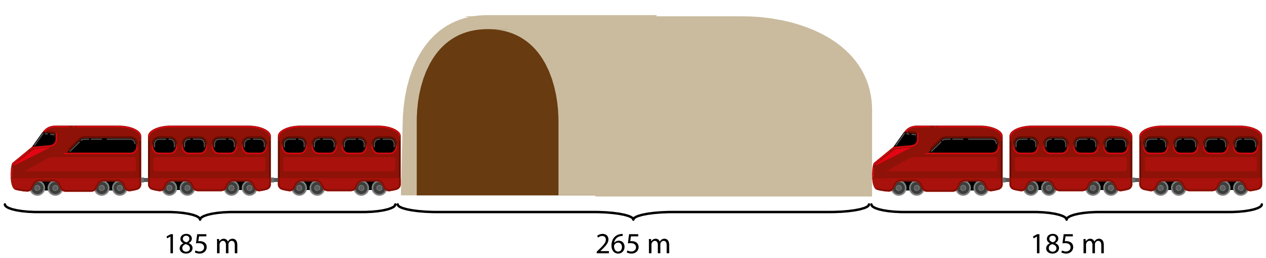
| **Problema 1** | **Etapele de rezolvare:** | **Problema 2** |
|---|---|---|
| Procentul de carbon al amestecului este $x$%. | ← **1)** alegerea necunoscutei/ necunoscutelor → | Sunt necesari:<br>$x$ litri de antigel;<br>$y$ litri de apă. |
| Amestecul are<br>$20 + 5 = 25$ tone.<br>Cantitatea de carbon din amestec este de<br>$\frac{25 \cdot x}{100}$ tone.<br>Cele 20 tone de oțel conțin<br>$\frac{20 \cdot 0{,}5}{100}$ tone de carbon.<br>Cele 5 tone de fontă conțin<br>$\frac{5 \cdot 5}{100}$ tone de carbon.<br>Rezultă ecuația:<br>$\frac{20 \cdot 0{,}5}{100} + \frac{5 \cdot 5}{100} = \frac{25 \cdot x}{100}$. | ← **2)** obținerea ecuației/ sistemului de ecuații → | Amestecul are<br>$x + y = 100$ litri.<br>100 litri de amestec cu densitatea de 102,7 grame pe litru au masa egală cu<br>$100 \cdot 102{,}7 = 10270$ grame.<br>$x$ litri de antigel cu densitatea de 113,5 grame pe litru au masa egală cu<br>$x \cdot 113{,}5$ grame.<br>$y$ litri de apă cu densitatea de 100 grame pe litru au masa egală cu<br>$y \cdot 100$ grame.<br>Rezultă ecuația:<br>$113{,}5x + 100y = 10270$<br>și sistemul:<br>$\begin{cases} x + y = 100 \\ 113{,}5x + 100y = 10270 \end{cases}$. |
| $x = 1{,}4$ | ← **3)** rezolvarea ecuației/ sistemului de ecuații → | $\begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}$ |
| Procentul de carbon al amestecului este de 1,4%. | ← **4)** formularea răspunsului la cerințele problemei → | Sunt necesari 20 de litri de antigel și 80 de litri de apă pentru a obține amestecul cerut. |

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** La un concurs de matematică s-au propus spre rezolvare 20 de probleme. Pentru fiecare problemă rezolvată corect s-au acordat 10 puncte, iar pentru fiecare problemă nerezolvată sau parțial rezolvată s-au scăzut 6 puncte. Un elev a obținut 72 de puncte. Câte probleme a rezolvat corect elevul?

**2** Dintr-o bucată de stofă s-a tăiat o dată $\frac{1}{3}$, iar altă dată, $\frac{1}{4}$ din rest. Măsurând noul rest, s-a găsit că acesta are 30 de metri. Ce lungime a avut bucata de stofă?

**3** Un tren lung de 185 de metri trece printr-un tunel lung de 265 de metri, cu viteza de 50 km/h.




**a)** Care este distanța parcursă de ultimul vagon de la intrarea locomotivei în tunel și până la ieșirea din tunel a ultimului vagon?
**b)** Câte secunde a durat trecerea trenului prin tunel?

**4** Raportul a două numere este $\frac{3}{5}$. Dacă din suma celor două numere se scade 100, se obține 460. Determină numerele.

**5** Determină două numere, știind că, împărțind pe unul dintre acestea la celălalt, se obțin câtul 7 și restul 14, iar suma dintre deîmpărțit, împărțitor, cât și rest este 331.

**6** Un robinet umple un bazin în 20 de minute. Alt robinet umple același bazin în 30 de minute. Ambele robinete sunt deschise 4 minute și în bazin se strâng 200 de litri de apă. Calculează capacitatea bazinului.

**7** Mihai, Mihaela și Andreea cumpără creioane și pixuri de la o librărie. Pentru 15 creioane și 6 pixuri, Mihaela plătește 36 de lei. Pentru două creioane și 4 pixuri, Mihai plătește 16 lei. Cât plătește Andreea pentru 5 creioane și două pixuri?

**8** Într-un atelier, prin *planul zilnic pe muncitor* se înțelege numărul de piese pe care un muncitor trebuie să le lucreze în fiecare zi, iar prin *planul zilnic al atelierului* se înțelege numărul total de piese pe care muncitorii atelierului trebuie să le lucreze zilnic. Muncitorii atelierului, lucrând fiecare câte 24 de piese pe zi, depășesc cu 20% planul zilnic pe muncitor. Dacă numărul muncitorilor ar crește de 1,4 ori și fiecare muncitor ar depăși planul zilnic pe muncitor cu 5 piese, atunci planul zilnic al atelierului ar fi mai mare cu 2400 de piese. Câți muncitori are atelierul și care este planul zilnic pe muncitor?

**9** Suma a trei numere este 460. Primul număr este 25% din al doilea, iar al treilea este 75% din primul număr. Determină numerele.

**10** Pentru extinderea unei plantații de pomi fructiferi, s-au cumpărat cireși și vișini, plătindu-se pentru un cireș 10 lei, iar pentru un vișin, 6 lei. Știind că pomii au costat 252 de lei și că au fost cumpărați mai mulți cireși decât vișini, calculează numărul maxim de pomi care se pot planta.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Suma a două numere reale este $9\sqrt{3}$. Dacă diferența celor două numere este $5\sqrt{3}$, atunci cel mai mic dintre numere este $4\sqrt{3}$. **A F**

**b)** Dacă diferența dintre un număr real *x* și produsul acestuia cu $-10$ este egală cu $11\sqrt{2}$, atunci *x* este egal cu $\sqrt{2}$. **A F**

**c)** Raportul a două numere reale este 0,(3). Dacă suma celor două numere este $24\sqrt{7}$, atunci cel mai mare dintre numere este $20\sqrt{7}$. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**

Ramona are 12 ani. Peste trei ani, suma vârstei Ramonei și a mamei sale este egală cu 58 de ani.

| | |
|---|---|
| **a)** Vârsta actuală a mamei Ramonei este de … | **1)** 2 ani; |
| **b)** Vârsta Ramonei a reprezentat o cincime din vârsta mamei sale în urmă cu … | **2)** 42 de ani; |
| **c)** Vârsta mamei va fi de trei ori mai mare decât vârsta Ramonei peste … | **3)** 40 de ani; |
| | **4)** 5 ani. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

Într-o clasă, dacă se așază câte doi elevi într-o bancă, rămân cinci elevi în picioare, iar, dacă de așază câte trei elevi într-o bancă, rămân două bănci libere. Numărul băncilor din această clasă este egal cu $\boxed{\phantom{000}}$.

# 1. PROBLEME RECAPITULATIVE

**1** Se consideră egalitatea $a = b$. Scrie egalitatea echivalentă cu aceasta obținută astfel:
**a)** adunând 17 la ambii membri ai egalității; **b)** scăzând 50 din ambii membri ai egalității;
**c)** dublând membrii egalității; **d)** micșorând de 10 ori membrii egalității.

**2** Se consideră egalitatea $a = b$ și se știe că cei doi membri ai egalității sunt numere pozitive.
**a)** Scrie egalitatea echivalentă cu aceasta obținută ridicând la puterea $n$ ambii membri ai egalității, pentru $n = 3$, respectiv $n = -2$.
**b)** Scrie egalitatea echivalentă cu aceasta obținută prin extragerea radicalului din ambii membri ai egalității.

**3** Dacă $2a + 4b = 18$, calculează: **a)** $a + 2b$; **b)** $3a + 6b$; **c)** $5a + 10b + 55$.

**4** Scrie un exemplu de patru numere reale $a, b, c, d$, distincte două câte două, astfel încât:
**a)** $a + b = c + d$; **b)** $a \cdot b = c \cdot d$.

**5** Determină numerele raționale $a$ și $b$, știind că: $2a\sqrt{7} + b - 3 = b\sqrt{7} + a$.

**6** Stabilește care dintre elementele mulțimii $A = \{\sqrt{3}, 1, 2, -\sqrt{3}\}$ este soluție a ecuației $3x - \sqrt{12} = x - 4\sqrt{3}$.

**7** Arată că numărul real $1 - \sqrt{3}$ este soluție a ecuației $1 - x = \sqrt{3}$.

**8** Determină numărul real $m$ pentru care ecuația $(m + 1) \cdot x - 6 = 0$ are soluția $0,(6)$.

**9** Rezolvă ecuațiile: **a)** $2x - \sqrt{3} = \sqrt{75}$; **b)** $0,5 \cdot (3x + \sqrt{5}) = x - \sqrt{5}$; **c)** $\sqrt{3}x - 2 = 4$; **d)** $5 \cdot (x - \sqrt{5}) = 2 \cdot (2x + \sqrt{5})$.

**10** **a)** Determină $x \in \mathbb{N}$ pentru care $|x - 2| = 3$. **b)** Determină $x \in \mathbb{Q}$ pentru care $(x - 3) \cdot (2x + \sqrt{5}) = 0$.
**c)** Determină $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{3} \cdot x + \sqrt{27} = 3x + 3$.

**11** **a)** Rezolvă ecuația $3x - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.
**b)** Determină $m \in \mathbb{R}$, știind că $x = \sqrt{2} + 1$ este soluție a ecuației $mx - 2\sqrt{2} = 2$.

**12** Rezolvă prin metoda substituției sistemele:

**a)** $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 5 \\ 4|x| + 5|y| = 9 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5 \\ \frac{5}{x} + \frac{7}{y} = 12 \end{cases}$.

**13** Rezolvă prin metoda reducerii sistemele:
**a)** $\begin{cases} 5x - y = 6 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 10x - 7y = -18 \\ -4x + 5y = 16 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} 2 \cdot (2x + 3y) + x = 9 + 2y \\ x - 3y + 8 = 3 \cdot (3x - y) \end{cases}$.

**14** Rezolvă sistemele și justifică echivalența acestora: **a)** $\begin{cases} x - 11y = -3 \\ 5x + 11y = 51 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x + 2,2y = 10,2 \\ 0,(3)x - 3,(6)y = -1 \end{cases}$.

**15** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = a \end{cases}$, unde $a$ este un număr real.
**a)** Dacă $a = 3$, determină soluția sistemului. **b)** Dacă $x$ și $y$ sunt numere pozitive, arată că $-1 \le a \le 1$.

**16** Raportul a două numere este 0,(6). Dacă la suma lor se adaugă 30, se obține 120. Calculează numerele.

**17** Un robinet umple un bazin în 30 de minute, iar un alt robinet umple același bazin în 20 de minute. Dacă ambele robinete sunt deschise 4 minute, atunci în bazin se acumulează 300 $\ell$ de apă. Calculează capacitatea bazinului.

**18** Mihai a cheltuit o sumă de bani astfel: o cincime din total în prima zi, o pătrime din rest a doua zi, o treime din noul rest a treia zi și constată că mai are 400 de lei. Calculează ce sumă de bani a avut Mihai.

**19** După două reduceri succesive de preț, una de 15% și alta de 12%, prețul unui obiect este de 1122 de lei. Determină prețul inițial al obiectului.

**20** La un concurs, candidații au avut de răspuns la 10 întrebări. Pentru fiecare răspuns corect s-au acordat 10 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit s-au scăzut două puncte. Determină câte răspunsuri corecte a dat un candidat care a obținut 52 de puncte.

# 2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

(5p) 1. Soluția ecuației $\sqrt{3}(x+1)-\sqrt{27}(x-1)=0$ este ... .

(5p) 2. Dacă $x = \sqrt{2}+1$ este soluție a ecuației $mx - 5 = 5\sqrt{2}$, atunci $m$ este egal cu ... .

(5p) 3. Suma soluțiilor ecuației $(x+\sqrt{75})\cdot(x-\sqrt{3})=0$ este egală cu ... .

(5p) 4. Dacă $\frac{1}{3}a-\frac{3}{\sqrt{3}}=0,(3)b-\sqrt{3}$, atunci diferența $a - b$ este egală cu ... .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**

| A | B |
|---|---|
| (5p) 1. O soluție a ecuației $2x + y = 4$ este ... | a) $\sqrt{2}$; |
| (5p) 2. Soluția sistemului $\begin{cases} x-2y=1 \\ 5x-2y=21 \end{cases}$ este ... | b) $-\sqrt{2}$; |
| (5p) 3. Soluția ecuației $(1-\sqrt{2})\cdot x=\sqrt{2}-2$ este ... | c) (3, 2); |
| (5p) 4. Pentru $m = 2\sqrt{2}$, soluția ecuației $2x + m = 0$ este ... | d) (1, 2); |
| | e) (5, 2). |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Numărul natural $\overline{ab}$ care verifică egalitățile $\overline{ab}+\overline{ba}=88$ și $\overline{ab}+a=18$ este:
A. 71; B. 26; C. 62; D. 17.

(5p) 2. Dacă sistemul $\begin{cases} a\cdot x-3\cdot y=-1 \\ 2\cdot x+b\cdot y=9 \end{cases}$ admite soluția (2, 1), atunci $5a - b$ este egal cu:
A. 4; B. 9; C. 3; D. 0.

(5p) 3. Soluția sistemului $\begin{cases} 2\sqrt{6}\cdot x+\sqrt{5}\cdot y=17 \\ \sqrt{6}\cdot x-\sqrt{5}\cdot y=1 \end{cases}$ este perechea de numere:
A. $(\sqrt{5},\sqrt{6})$; B. $(\sqrt{6},\sqrt{5})$; C. $(\sqrt{2},\sqrt{5})$; D. $(\sqrt{3},\sqrt{5})$.

(5p) 4. Dacă perechea (2, –1) este soluție a ecuației $3x - ay = 11$, atunci numărul $a$ este egal cu:
A. –7; B. 5; C. –5; D. 7.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

IV. Precizează dacă următoarele ecuații sunt echivalente și justifică răspunsul dat:

(5p) a) $\sqrt{10}\cdot x-5\sqrt{2}=0$ și $3 \cdot (2x - 7) = 6x - 21$;

(5p) b) $7 \cdot (3x + 7) = 2 \cdot (1 - 4x)$ și $25 \cdot (x + 2) = 4x + 3$;

(5p) c) $x + 5y = 21$ și $4 \cdot (x + y) = 3 \cdot (x + 7) - y$.

V. Pentru vizionarea unui spectacol, Alexandra cumpără șase bilete pentru adulți și patru bilete pentru copii, plătind în total suma de 720 de lei. Prețul unui bilet pentru copii reprezintă 75% din prețul unui bilet pentru adulți.

(5p) a) Este posibil ca prețul unui bilet pentru copii să fie de 25 de lei? Justifică răspunsul dat.

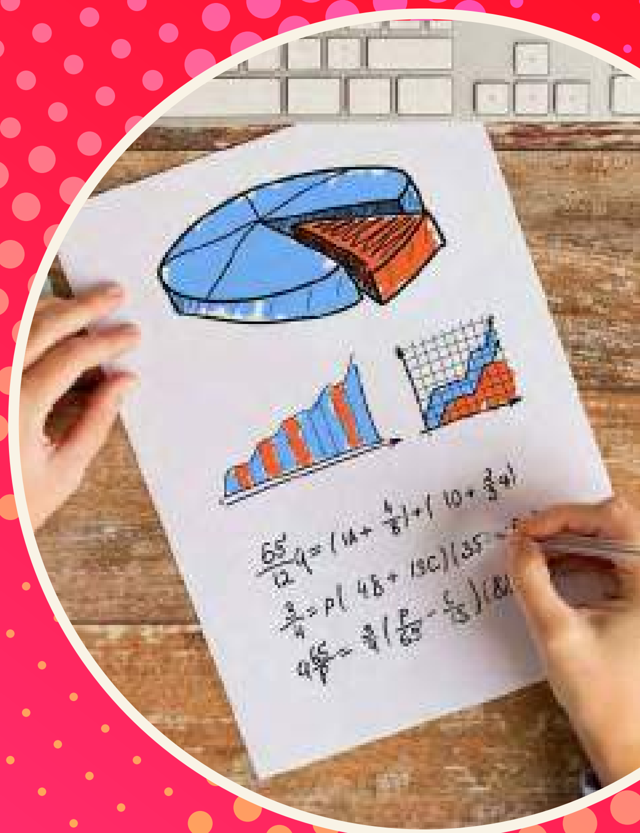
(10p) b) Determină prețul unui bilet pentru adulți și prețul unui bilet pentru copii.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# 3

# ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR



**Unitatea: Elemente de organizare a datelor**

L1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide
L2. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale
L3. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale
L4. Distanța dintre două puncte din plan
L5. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor

**Evaluare: Elemente de organizare a datelor**

1. Probleme recapitulative
2. Test de evaluare

# UNITATEA: ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

## LECȚIA 1 Produsul cartezian a două mulțimi nevide

### Ne amintim

- noțiunile de mulțime, cardinal, mulțime vidă, element al unei mulțimi, relația de apartenență;
- relațiile dintre două mulțimi (relația de incluziune și relația de egalitate);
- reprezentarea unei mulțimi prin: enumerarea elementelor, diagrame Venn-Euler, o proprietate caracteristică elementelor;
- operațiile cu mulțimi: reuniunea, intersecția, diferența.

### Rezolvăm împreună

Pentru ținerea evidenței unor documente, cum ar fi certificate de naștere, cărți de identitate și altele, acestora li se atribuie *o serie* și *un număr*.

**a)** Copiază în caietul tău și completează *seria* și *numărul* cărții de identitate din dreapta.


**b)** Pentru scrierea seriilor unui lot de cărți de identitate se folosesc toate literele din mulțimea $\{A, B\}$ și toate numerele din mulțimea $\{1, 2, 3\}$. Știind că primul element al seriei este o literă, iar al doilea element este o cifră, scrie toate seriile cărților de identitate din lot și determină numărul lor.

**c)** Pentru un al doilea lot de cărți de identitate se folosesc aceleași litere și aceleași cifre, dar primul element al seriei este o cifră și al doilea element este o literă. Scrie toate seriile cărților de identitate din lotul al doilea și determină numărul lor.

***Rezolvare** (activitate individuală):*

**a)** Seria: $A3$; numărul: 59362.

**b)** $A1$, $A2$, $A3$, $B1$, $B2$, $B3$, deci numărul cărților de identitate este egal cu 6.

**c)** $1A$, $1B$, $2A$, $2B$, $3A$, $3B$, deci numărul cărților de identitate este egal cu 6.

### Observăm și descoperim cunoștințe noi

Seria unei cărți de identitate este o *pereche ordonată*:

- La punctul b), **perechea ordonată** este formată dintr-un element al mulțimii $\{A, B\}$ și un element al mulțimii $\{1, 2, 3\}$, iar perechile ordonate sunt: $(A, 1)$, $(A, 2)$, $(A, 3)$, $(B, 1)$, $(B, 2)$, $(B, 3)$.

Dacă notăm mulțimile $\{A, B\}$ și $\{1, 2, 3\}$ cu $M$ și $N$, despre perechile de mai sus spunem că sunt elementele produsului cartezian al mulțimilor $M$ și $N$, pe care îl notăm $M \times N$.

- La punctul c), **perechea ordonată** este formată dintr-un element al mulțimii $\{1, 2, 3\}$ și un element al mulțimii $\{A, B\}$, iar perechile ordonate sunt: $(1, A)$, $(1, B)$, $(2, A)$, $(2, B)$, $(3, A)$, $(3, B)$.

Despre aceste perechi spunem că sunt elementele produsului cartezian al mulțimilor $N$ și $M$, pe care îl notăm $N \times M$.

*Exemplu:*

Pentru mulțimile $M = \{A, B\}$ și $N = \{1, 2, 3\}$, rezultă:

$M \times N = \{(A, 1), (A, 2), (A, 3), (B, 1), (B, 2), (B, 3)\}$ și $N \times M = \{(1, A), (1, B), (2, A), (2, B), (3, A), (3, B)\}$.

Produsul cartezian $M \times N$ este diferit de produsul cartezian $N \times M$ și notăm $M \times N \neq N \times M$.

Deoarece mulțimea $M$ are două elemente ($\text{card } M = 2$) și mulțimea $N$ are trei elemente ($\text{card } N = 3$), mulțimea $M \times N$ va avea $2 \cdot 3 = 6$ elemente (perechi). Analog, mulțimea $N \times M$ are $3 \cdot 2 = 6$ elemente (perechi). Rezultă că $M \times N$ și $N \times M$ au același număr de elemente și notăm $\text{card}(M \times N) = \text{card}(N \times M)$.

## Reține!

- Fiind date două mulțimi nevide, $M$ și $N$, mulțimea ale cărei elemente sunt perechi ordonate de forma $(x, y)$, cu $x$ din mulțimea $M$ și $y$ din mulțimea $N$, se numește **produsul cartezian** al mulțimilor $M$ și $N$.
- Produsul cartezian al mulțimilor $M$ și $N$ se notează cu $M \times N$ și $M \times N = \{(x, y) \mid x \in M \text{ și } y \in N\}$.
- Mulțimile $M \times N$ și $N \times M$ sunt, în general, diferite: $M \times N \neq N \times M$.
- Mulțimile $M \times N$ și $N \times M$ au același număr de elemente: $\text{card}(M \times N) = \text{card}(N \times M)$.
- $\text{card}(M \times N) = \text{card}\, M \cdot \text{card}\, N$.

**Știai că...**

Denumirea „cartezian" provine de la numele latin (**Cartesius**) al lui **René Descartes** (1596-1650), matematician și filozof francez, considerat primul reprezentant al matematicilor moderne.
A introdus utilizarea numerelor negative, a studiat *numerele perfecte* și a descoperit anumite proprietăți ale acestora. De asemenea, a elaborat *metoda de determinare a rădăcinilor întregi ale unei ecuații*. Descartes este primul matematician care a introdus *utilizarea calculului algebric pentru studiul proprietăților geometrice ale figurilor*, ceea ce a condus la apariția *geometriei analitice*.

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Fie mulțimile $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ și $N = \{x, y\}$.

**a)** Copiază și completează cu $M \times N$ sau cu $N \times M$ astfel încât afirmațiile rezultate să fie adevărate:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(0, x) \in \ldots$ | $(y, -1) \in \ldots$ | $(y, 0) \in \ldots$ | $(2, y) \in \ldots$ |
| $(-1, x) \notin \ldots$ | $(y, 0) \notin \ldots$ | $(2, x) \notin \ldots$ | $(0, x) \notin \ldots$ |

**b)** Scrie elementele produsului cartezian $M \times N$.

**c)** Scrie elementele produsului cartezian $N \times M$.

***Rezolvare** (activitate individuală):*

**a)** Perechea ordonată $(a, b)$ este element al mulțimii $M \times N$ dacă și numai dacă $a \in M$ și $b \in N$. Perechea ordonată $(a, b)$ este element al mulțimii $N \times M$ dacă și numai dacă $a \in N$ și $b \in M$.
Deoarece $0 \in M$ și $x \in N$, rezultă că $(0, x) \in M \times N$ și $(0, x) \notin N \times M$ etc.

**b)** Elementele produsului cartezian $M \times N$ sunt: $(-1, x)$, $(-1, y)$, $(0, x)$, $(0, y)$, $(1, x)$, $(1, y)$, $(2, x)$, $(2, y)$.

**c)** Elementele produsului cartezian $N \times M$ sunt: $(x, -1)$, $(x, 0)$, $(x, 1)$, $(x, 2)$, $(y, -1)$, $(y, 0)$, $(y, 1)$, $(y, 2)$.

### Exercițiul 2

Determină trei numere reale $x$, $y$ și $z$, cu $x < y < z$, știind că mulțimile $A \times B$ și $B \times A$ sunt egale, unde $A = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{2}, 3\right\}$, iar $B = \{x, y, z\}$.

***Rezolvare** (activitate pe grupe):*

$\left(-\sqrt{3}, x\right) \in A \times B$. Dar $A \times B = B \times A$. Rezultă că $\left(-\sqrt{3}, x\right) \in B \times A$, deci $x \in A$. Prin urmare, $x \in \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{2}, 3\right\}$.

Analog, arată că $y \in \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{2}, 3\right\}$ și $z \in \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{2}, 3\right\}$.

Deoarece $x < y < z$, rezultă că $x = -\sqrt{3}$, $y = \sqrt{2}$, $z = 3$.

Reciproc, pentru $x = -\sqrt{3}$, $y = \sqrt{2}$, $z = 3$, mulțimile $A$ și $B$ sunt egale și atunci este evident că $A \times B = B \times A$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Se dau mulțimile $A = \{-1, 0, 2\}$ și $B = \{-2, 1\}$. Determină elementele mulțimilor: $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$.

**2** Se dau mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{4, 5\}$. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
**a)** $(1, 5) \in A \times B$; **b)** $(2, 2) \in B \times A$; **c)** $(2, 5) \in A \times B$;
**d)** $(1, 1) \in A \times A$; **e)** $(3, 5) \in A \times B$; **f)** $(4, 4) \in B \times B$.

**3** Determină $x$ și $y$, astfel încât:
**a)** $(x, 3) = (1, y)$; **b)** $(x, y) = (-2, 1)$; **c)** $(x - 3, y + 1) = (5, 3)$; **d)** $(2x + 1, 3) = (5, 3 - 2y)$.

**4** Se dau mulțimile $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{-3, -2, 0, 3\}$. Determină:
**a)** $x$, astfel încât $(2, x) \in A \times B$; **b)** $x$, astfel încât $(-3, x) \in B \times A$; **c)** $x > 0$, astfel încât $(-2, x) \in B \times A$.

**5** Știind că $A = \{-1, 1\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 2\}$, scrie elementele mulțimilor: $B$, $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$.

**6** Fie mulțimile $A = \{1, 3\}$ și $B = \{a, b\}$. Calculează: $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$.

**7** Se consideră mulțimile $A = \{3, 4, 5\}$ și $B = \{a, b\}$. Pentru deschiderea unui seif, se formează parole.
**a)** Cu elementele mulțimii $A$ se formează o parolă din două cifre. Câte parole se pot forma? Scrie-le pe toate.
**b)** Cu elementele mulțimii $B$ se formează o parolă din două litere. Câte parole se pot forma? Scrie-le pe toate.
**c)** Se formează parole de forma *mnpq*, unde $m$ și $n$ sunt elemente ale mulțimii $A$, iar $p$ și $q$ sunt elemente ale mulțimii $B$. Scrie trei parole de forma *mnpq*. Câte parole de forma *mnpq* sunt?

**8** Un instructor antrenează 4 băieți, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$, și 3 fete, $f_1$, $f_2$, $f_3$. Pentru un concurs de dans, antrenorul selectează o pereche băiat-fată.
**a)** Câte posibilități de selecție are antrenorul?
**b)** Calculează $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$, unde $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ și $A = \{f_1, f_2, f_3\}$.

**9** Mihai are 5 caiete cu coperți albastre, $a_1, a_2, \ldots, a_5$, și 11 caiete cu coperți roșii, $r_1, r_2, \ldots, r_{11}$, aranjate pe un raft. El alege la întâmplare două caiete. Câte posibilități are să aleagă:
**a)** două caiete albastre;
**b)** două caiete roșii;
**c)** primul caiet albastru și al doilea roșu?

**10** Se consideră mulțimea $A = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{2}, 2, 4\right\}$. Determină mulțimea $B$, știind că $A \times B = B \times A$.

**11** Se consideră două mulțimi nevide, $A$ și $B$. Demonstrează că, dacă $A \times B = B \times A$, atunci $A = B$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**
Se consideră mulțimile $A = \{-1, 1\}$ și $B = \{2, 3, 5\}$.
**a)** $(-1, 5) \in A \times B$. **A F**
**b)** $(3, 1) \in A \times B$. **A F**
**c)** $(2, 1) \notin B \times A$. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**
Se consideră două mulțimi, $A$ și $B$.

| | |
|---|---|
| **a)** Dacă card $A = 3$ și card$(A \times B) = 9$, atunci card $B$ este egal cu … | **1)** 1; |
| **b)** Dacă card $A = 5$ și card $B = 4$, atunci card$(A \times B)$ este egal cu … | **2)** 3; |
| **c)** Dacă card$(A \times B) = 23$ și card $B = 23$, atunci card $A$ este egal cu … | **3)** 20; |
| | **4)** 23. |

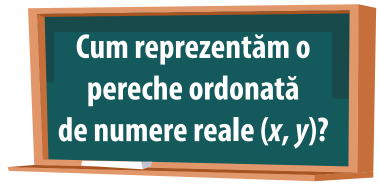
**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**
Fie $A$ și $B$ două mulțimi nevide. Produsul cartezian $A \times B$ este egal cu produsul cartezian $B \times A$ dacă și numai dacă $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 2 Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale

## Ne amintim

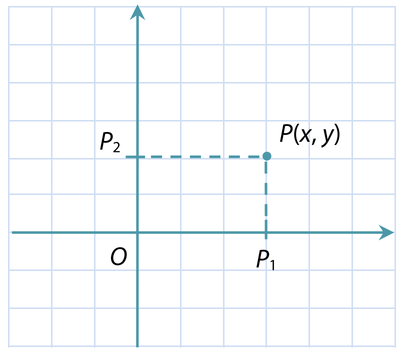
- noțiunea de axă a numerelor;
- reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi




**Pentru a reprezenta o pereche ordonată de numere reale ($x$, $y$), procedăm astfel:**

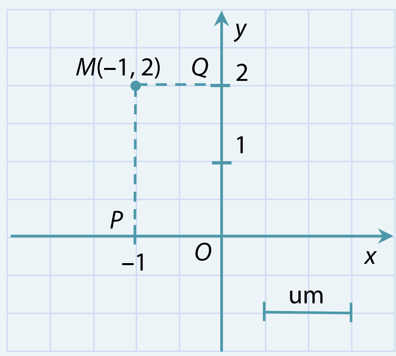
- considerăm în plan un sistem format din două axe perpendiculare: o axă orizontală, numită abscisă, și o axă verticală, numită ordonată;
- notăm cu $O$ punctul de intersecție a axelor și fixăm o unitate de măsură;
- numărul $x$ va fi reprezentat pe axa orizontală prin punctul $P_1$, iar numărul $y$ va fi reprezentat pe axa verticală prin punctul $P_2$;
- perpendiculara în $P_1$ pe axa orizontală se intersectează cu perpendiculara în $P_2$ pe axa verticală în punctul $P$.




**Se spune despre punctul $P$ că este reprezentarea în plan sau reprezentarea geometrică în plan, într-un sistem de axe ortogonale, a perechii ordonate de numere reale ($x$, $y$). Despre perechea de numere reale ($x$, $y$) se spune că reprezintă coordonatele punctului $P$.**

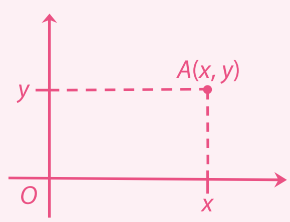
*Exemplu:* Pentru a reprezenta perechea de numere reale (–1, 2), desenăm în plan cele două axe perpendiculare, $Ox$ și $Oy$, și fixăm unitatea de măsură (um). Reprezentăm pe axa $Ox$ numărul –1 prin punctul $P$, iar pe axa $Oy$ reprezentăm numărul 2 prin punctul $Q$. Perpendiculara în $P$ pe axa orizontală se intersectează cu perpendiculara în $Q$ pe axa verticală în punctul $M$.

Se spune despre punctul $M$ că este reprezentarea în plan, într-un sistem de axe ortogonale, a perechii ordonate de numere reale (–1, 2). Despre perechea de numere reale (–1, 2) se spune că reprezintă coordonatele punctului $M$. Notăm $M(-1, 2)$ și citim „punctul $M$ de coordonate –1 și 2”. Abscisa punctului $M$ este numărul –1. Ordonata punctului $M$ este numărul 2.




## Reține!

- Două drepte perpendiculare (ortogonale), notate cu $Ox$, respectiv cu $Oy$, constituie un **sistem** sau un **reper de coordonate ortogonale în plan**, dacă se fixează o **unitate de măsură** și câte un **sens pozitiv** pe fiecare dreaptă.
  - Punctul $O$ se numește **originea** sistemului de coordonate.
  - Axa orizontală $Ox$ se numește **axa absciselor**, iar axa verticală $Oy$ se numește **axa ordonatelor**.
  - Sistemul de coordonate se notează cu $xOy$.
- **O pereche de numere reale ($x$, $y$) reprezentate în plan într-un sistem de coordonate ortogonale determină un punct $A$.**
  - Cele două numere, $x$ și $y$, sunt numite **coordonatele punctului $A$**.
  - Primul număr, $x$, se numește **abscisa punctului $A$**, iar al doilea număr, $y$, se numește **ordonata punctului $A$**.
  - Se scrie **$A(x, y)$** și se citește „**punctul $A$ de coordonate $x$ și $y$**”.



## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

Se consideră ecuația $2\sqrt{3}x - y\sqrt{3} = \sqrt{12}$, $x \in \{0, 1, 2\}$, $y \in \mathbb{R}$.

**a)** Rezolvă ecuația.

**b)** Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale mulțimea soluțiilor ecuației.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** $2\sqrt{3}x - y\sqrt{3} = \sqrt{12} \,|: \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x - y = 2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$.

Prin urmare, ecuația din enunț este echivalentă cu ecuația:

$$y = 2x - 2,\ x \in \{0, 1, 2\},\ y \in \mathbb{R}.$$

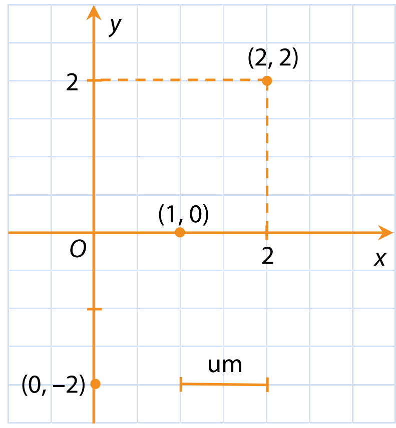
Deoarece $x \in \{0, 1, 2\}$, rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației este:

$$S = \{(0, -2), (1, 0), (2, 2)\}.$$

**b)** De la punctul precedent rezultă că avem de reprezentat într-un sistem de axe ortogonale următoarele perechi ordonate de numere reale:

$$(0, -2), (1, 0), (2, 2).$$

În figura alăturată este realizată reprezentarea respectivă.




### Exercițiul 2

Considerăm numerele reale $x = \sqrt{2} = 1{,}4142135623...$ și $y = -\sqrt{3} = -1{,}732050807...$ .

**a)** Determină numerele întregi consecutive $a$ și $b$, respectiv $c$ și $d$, pentru care $a < x < b$ și $c < y < d$.

**b)** Reprezintă în plan punctele $A(a, c)$ și $B(b, d)$.

**c)** Folosind rezultatul anterior și o unitate de măsură de 1 cm, realizează o reprezentare aproximativă a perechii $(x, y)$, unde $x = \sqrt{2}$ și $y = -\sqrt{3}$.

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

**a)** $a = 1$ și $b = 2$, respectiv $c = -2$ și $d = -1$.

**b)** Se desenează un sistem de axe ortogonale și se reprezintă punctele $A(1, -2)$ și $B(2, -1)$.

**c)** Deoarece $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, pentru a reprezenta pe axa $Ox$ pe $\sqrt{2}$, măsurăm 1,4 cm de la origine, în sens pozitiv, și notăm $M(1{,}4; 0)$ punctul de pe axa absciselor. Deoarece $-\sqrt{3} \approx -1{,}7$, pentru a reprezenta pe axa $Oy$ pe $-\sqrt{3}$, măsurăm 1,7 cm de la origine, în sens negativ, și notăm $N(0; -1{,}7)$ punctul de pe axa ordonatelor. Perpendiculara în $M$ pe axa absciselor se intersectează cu perpendiculara în punctul $N$ pe axa ordonatelor în punctul $P$. Coordonatele punctului $P$ sunt 1,4 și –1,7, adică punctul $P$ este reprezentarea aproximativă a perechii ordonate de numere reale $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Se consideră mulțimea $M = \{-2, 0, 2\}$.

**a)** Calculează $M \times M$.

**b)** Desenează un sistem de axe ortogonale.

**c)** În sistemul ortogonal desenat, reprezintă elementele mulțimii $M \times M$.

**2** Se dau mulțimile $A = \{-2, 0, 1\}$ și $B = \{-1, 2\}$. Pentru fiecare dintre mulțimile $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$ și $B \times B$, desenează câte un sistem de axe ortogonale și reprezintă elementele mulțimilor respective.

**3** **a)** Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale perechile de numere întregi al căror produs este egal cu 6.

**b)** Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale perechile de numere naturale a căror sumă este 6.

**4** Se consideră mulțimile $A = \{-2, 2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 1\}$.

**a)** Scrie elementele mulțimilor: $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$ și $B \times B$.

**b)** Pentru fiecare dintre mulțimile $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$ și $B \times B$, desenează câte un sistem de axe ortogonale și reprezintă elementele mulțimilor respective.

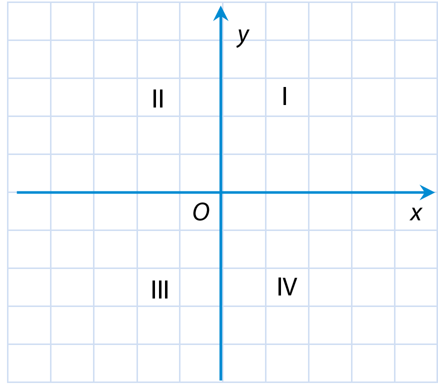
**5** Un sistem de axe ortogonale $xOy$ împarte planul în 4 regiuni numite *cadrane*, notate I, II, III și IV, ca în figura alăturată.

**a)** Reprezintă grafic perechile ordonate de numere: (–3, –5), (5, 3), (–4, 2), (2, –4).

**b)** Completează spațiile punctate cu I, II, III sau IV, astfel încât propozițiile rezultate să fie adevărate:

(–3, –5) ∈ $\boxed{...}$; (5, 3) ∈ $\boxed{...}$;

(–4, 2) ∈ $\boxed{...}$; (2, –4) ∈ $\boxed{...}$.




**6** Se consideră mulțimea $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 3 \text{ și } y \in \mathbb{R}\}$.

**a)** Scrie cinci elemente ale mulțimii.

**b)** Desenează un sistem de axe ortogonale și reprezintă perechile de numere scrise la punctul a).

**7** Se consideră mulțimea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ și } y > 0\}$.

**a)** Scrie cinci elemente ale mulțimii.

**b)** Desenează un sistem de axe ortogonale și reprezintă perechile de numere scrise la punctul a).

**c)** Cu care dintre cadrane (I, II, III, IV) sau cu care dintre axe ($Ox$, $Oy$) se poate identifica mulțimea considerată?

**8** Rezolvă problema anterioară considerând mulțimea:

**a)** $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ și } y > 0\}$;

**b)** $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ și } y \in \mathbb{R}\}$;

**c)** $C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ și } y < 0\}$;

**d)** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ și } y < 0\}$;

**e)** $E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } y = 0\}$;

**f)** $F = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ și } y > 0\}$.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

20 min

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Perechea de numere reale (–2, 3) se reprezintă într-un sistem de axe ortogonale în cadranul I. **A F**

**b)** Dacă punctul $M$ este reprezentarea geometrică a perechii de numere reale $(a, b)$, atunci abscisa punctului $M$ este $b$. **A F**

**c)** Perechea de numere reale $(a, b)$ este situată pe axa ordonatelor dacă și numai dacă $a = 0$. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**

**a)** Punctul $A$ este reprezentarea geometrică a perechii de numere reale …

**b)** Punctul $B$ este reprezentarea geometrică a perechii de numere reale …

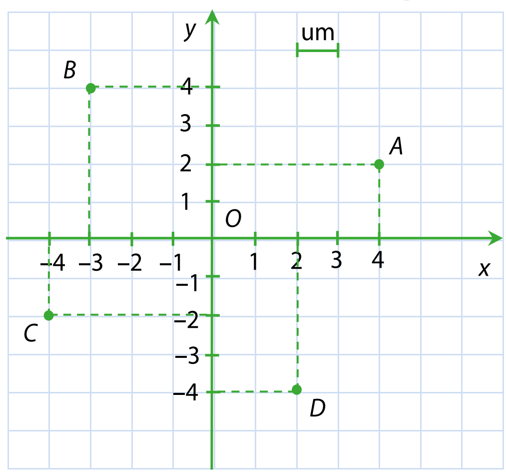
**c)** Punctul $C$ este reprezentarea geometrică a perechii de numere reale …

**1)** (4, –3);

**2)** (–4, –2);

**3)** (–3, 4);

**4)** (4, 2).




**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

Dacă originea unui sistem de axe ortogonale are abscisa $a$ și ordonata $b$, atunci rezultatul sumei $a + b$ este $\boxed{\phantom{000}}$.

# LECȚIA 3 Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

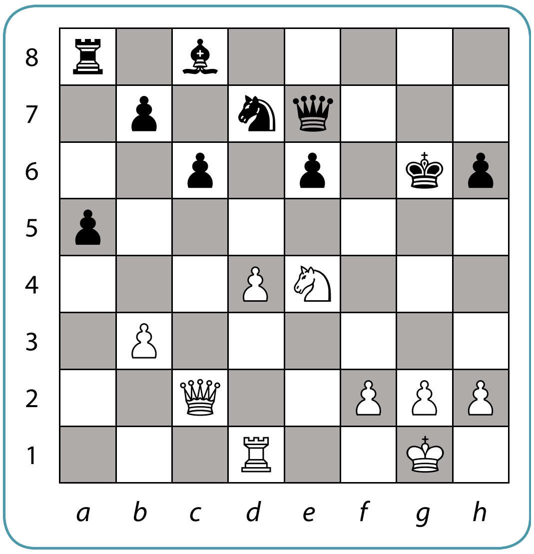
În practică există situații când unui punct de pe o suprafață i se asociază o pereche ordonată de numere sau de litere și numere.

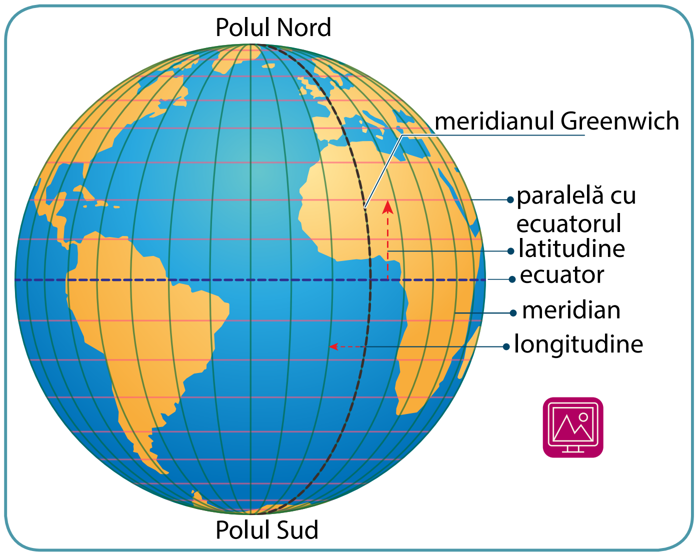
### Ne amintim

◆ Orice pereche ordonată de numere reale $(x, y)$ poate fi reprezentată **într-un sistem de axe ortogonale în plan printr-un punct**.

*Exemple:*

**1)** Jocul de șah se desfășoară pe o tablă care are forma pătrată și care este împărțită în 8 linii și 8 coloane, formând 64 de pătrate. Coloanele sunt indicate prin litere de la *a* la *h*, iar liniile sunt indicate prin cifre de la 1 la 8. Poziția unei piese de pe suprafața tablei de șah este indicată printr-o pereche ordonată de forma (literă, cifră). Astfel: calului alb i se asociază perechea ordonată (*e*, 4); reginei albe i se asociază perechea (*c*, 2) etc.



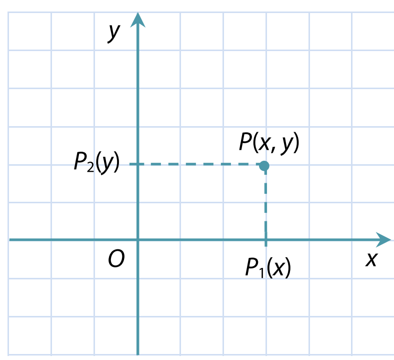

**2)** Ați învățat la geografie că poziția unui punct *X* de pe suprafața Pământului se indică printr-o pereche de numere, care sunt numite **latitudine** și **longitudine**. Latitudinea și longitudinea reprezintă **coordonatele geografice** ale punctului respectiv.

◆ Dacă punctul este situat la nord de ecuator, latitudinea se numește **latitudine nordică** și este notată cu N (sau cu semnul +); dacă punctul este situat la sud de ecuator, latitudinea se numește **latitudine sudică** și este notată cu S (sau cu semnul –).

◆ Dacă punctul considerat se află la est față de **originea longitudinii**, longitudinea lui se numește **longitudine estică** și este notată cu E (sau cu semnul +). Dacă punctul considerat se află la vest de **originea longitudinii**, longitudinea lui se numește **longitudine vestică** și este notată cu V (sau cu semnul –).

Punctul utilizat în prezent de toată lumea ca *origine a longitudinii* este Observatorul astronomic din Greenwich, Marea Britanie. Acesta a fost ales prin rezoluția adoptată în 1884, la *Conferința Internațională a Meridianului*.

*Exemplul anterior ne oferă un model pentru plan.* Astfel, dacă în plan considerăm un sistem de axe ortogonale notat $xOy$, orice punct $P$ al planului poate fi proiectat pe axa $Ox$ și pe axa $Oy$. Notăm cu $P_1$ proiecția ortogonală a punctului $P$ pe axa $Ox$ și cu $P_2$, proiecția ortogonală a punctului $P$ pe axa $Oy$. Deoarece oricărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un număr real, va rezulta că punctului $P_1$, care aparține axei $Ox$, îi va corespunde un număr real $x$ unic. De asemenea, punctului $P_2$, care aparține axei $Oy$, îi va corespunde un număr real $y$ unic. Prin urmare, într-un sistem de axe ortogonale $xOy$ din plan, orice punct $P$ poate fi reprezentat printr-o pereche ordonată $(x, y)$ de numere reale.



## Reține!

- Dacă *xOy* este un sistem de axe ortogonale într-un plan, atunci:
  - orice pereche ordonată de numere reale $(x, y)$ poate fi reprezentată în sistemul ortogonal *xOy* printr-un punct *M*;
  - orice punct al planului reprezintă o pereche ordonată $(x, y)$ de numere reale.
- Deoarece orice pereche ordonată de numere reale $(x, y)$ este un element al produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, rezultă că:
  - orice element al produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ poate fi reprezentat în plan printr-un punct și oricărui punct *P* din plan îi corespunde o pereche $(x, y)$ a produsului cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
  - notând mulțimea tuturor punctelor planului cu litera grecească $\pi$ (pi), admitem că planul $\pi$ poate fi identificat cu produsul cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

## Aplicăm cunoștințele

### Exercițiul 1

**a)** Reprezintă într-un sistem de coordonate următoarele puncte: $A(-1, 3)$, $B(3, 2)$, $C(-3, -3)$, $D(2, -2)$, $E(0, 2)$, $F(-2, 0)$, $G(1, -1)$.

**b)** Scrie coordonatele punctelor din figura 1.

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

**a)** Se desenează un sistem de axe ortogonale *xOy* și se fixează unitatea de măsură. Se reprezintă punctele ca în figura 2.

**b)** Luând în considerare unitatea de măsură, se obține: $A(2, -2)$, $B(3, 0)$, $C(1, 2)$, $D(0, 4)$, $E(-2, 3)$, $F(-3, 0)$, $G(1, 0)$.

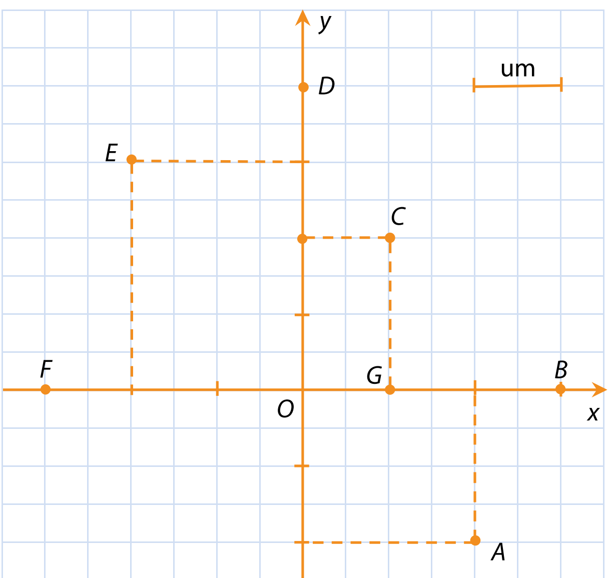


*Fig. 1*

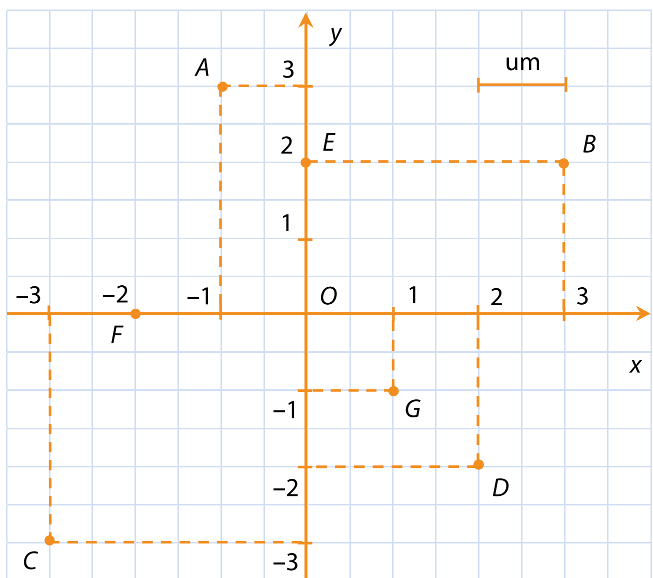


*Fig. 2*

## Proiect

Accesează pe internet site-ul https://www.mapsdirections.info/ro/coordonate-gps.html și găsește:

**a)** coordonatele geografice ale localităților: Paris (oraș din Franța), Dublin (oraș din Irlanda), Melbourne (oraș din Australia), Cape Town (oraș din Africa);

**b)** localitățile care au coordonatele geografice: (44.43; 26.102); (–26.205; 28.049); (34.053; –118.242).

## EXERCIȚIUL 2

Desenează un sistem de axe ortogonale *xOy*. Alege ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 1 cm și reprezintă punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E* din tabelul de mai jos.

| Punctul | Abscisa | Ordonata |
|---|---|---|
| *A* | 1,0 | 2,5 |
| *B* | 2,0 | −2,5 |
| *C* | −1,0 | 3,0 |
| *D* | −2,0 | −3,0 |
| *E* | 3,0 | 1,0 |

***Rezolvare*** *(activitate pe grupe):*
Se desenează sistemul de axe ortogonale, luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 1 cm (figura 3).

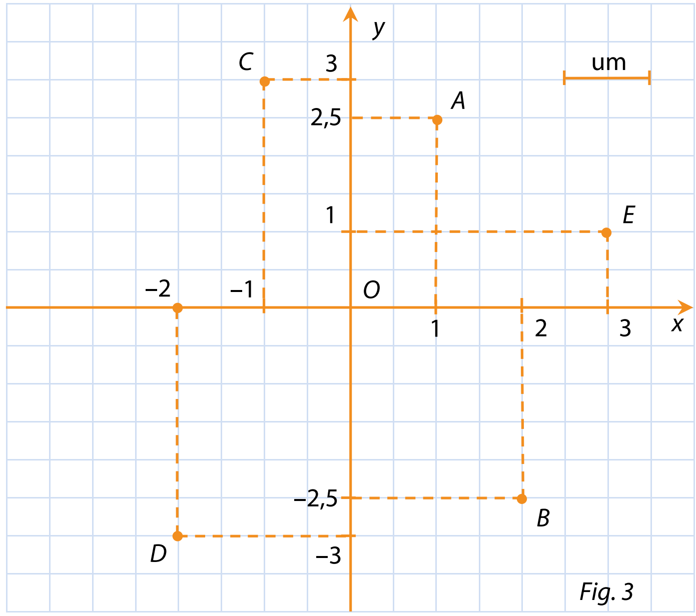
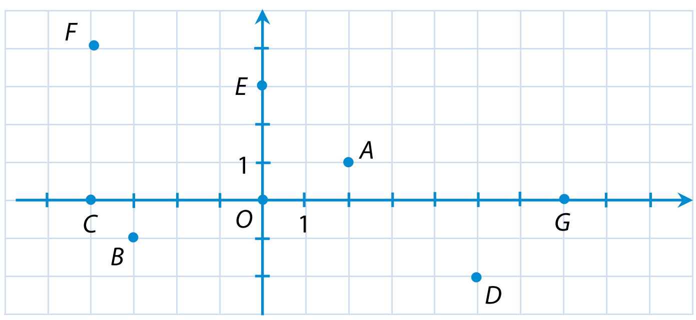


*Fig. 3*

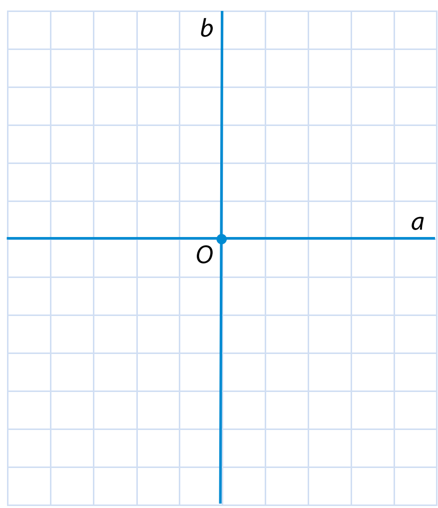
## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** **a)** Precizează coordonatele punctelor *A, B, C, D, E, F* și *G* din figura alăturată.
**b)** Precizează punctele care au aceeași abscisă.
**c)** Precizează punctele care au aceeași ordonată.
**d)** Precizează punctele care au abscisa pozitivă și ordonata negativă.
**e)** Precizează punctele care au abscisa negativă și ordonata pozitivă.
**f)** Precizează punctele care sunt situate pe axa ordonatelor.




**2** Pe foaia caietului de matematică, desenează un sistem de axe ortogonale *xOy* și alege unitatea de măsură de 1 cm.
**a)** Reprezintă punctele: $A(3; -5)$, $B(-4,5; 3,5)$, $C(1,5; 3,5)$, $P(-3; 0)$, $Q(-1,5; -3,5)$ și $R(0; -2,5)$.
**b)** Cu ajutorul unei rigle și al unui compas, verifică dacă unul dintre aceste puncte este mijlocul segmentului determinat de alte două puncte. Numește segmentul și mijlocul lui.

**3** Figura alăturată reprezintă o porțiune dintr-o foaie a unui caiet de matematică, pe care s-a fixat un reper de axe ortogonale și s-a ales unitatea de măsură de 1 dm. Unitatea de măsură nu poate fi reprezentată în desen, din cauza dimensiunilor reduse ale porțiunii de foaie.
**a)** Calculează numărul $r = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) : 1,5$ cu două zecimale exacte, folosind calculatorul de buzunar.
**b)** Folosind rezultatul precedent, copiază și completează figura cu punctul $A(r, r)$.
**c)** Completează figura cu punctele *B*, *C*, *M* și *N*, unde:
– *B* este simetricul lui *A* față de dreapta *a*;
– *C* este simetricul lui *B* față de dreapta *b*;
– *M* este intersecția dreptelor *AB* și *a*;
– *N* este intersecția dreptelor *BC* și *b*.

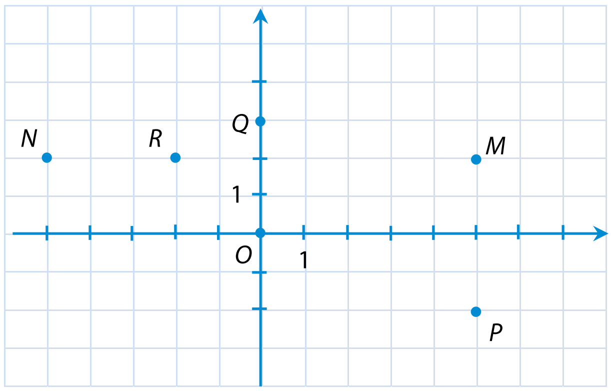


**d)** Scrie coordonatele punctelor *A*, *B*, *C*, *M* și *N*.
**e)** Demonstrează că punctele *A*, *O*, *C* sunt coliniare.

**4** Completează tabelul de mai jos, precizând cadranul sau axa căreia îi aparține punctul.

| **Punctul** | $A\left(-3,\frac{9}{8}\right)$ | $B\left(3,-\frac{7}{18}\right)$ | $C\left(0,\sqrt{113}\right)$ | $D\left(-3,-\sqrt{3}\right)$ | $E\left(0,-\sqrt{38}\right)$ | $F\left(\frac{1}{12},0\right)$ | $G\left(-3\frac{1}{2},3\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cadranul/Axa** | III | ? | *Oy* | ? | ? | ? | ? |

**5** În sistemul de axe ortogonale *xOy* din figura de mai jos, se consideră punctele *Q*, *M*, *N*, *P* și *R*. Copiază și completează textul de mai jos cu ajutorul cuvintelor: *abscisele*, *egale*, *coordonatele*, *abscisă*, *ordonată*, *opuse*.




**a)** Punctele *M* și *P* au aceeași …, dar ordonatele lor sunt numere … .
**b)** Punctul *R* are … numere … .
**c)** Punctele *M* și *N* au aceeași …, iar … acestora au modulele … .
**d)** Punctele *Q* și *O* au aceeași … .

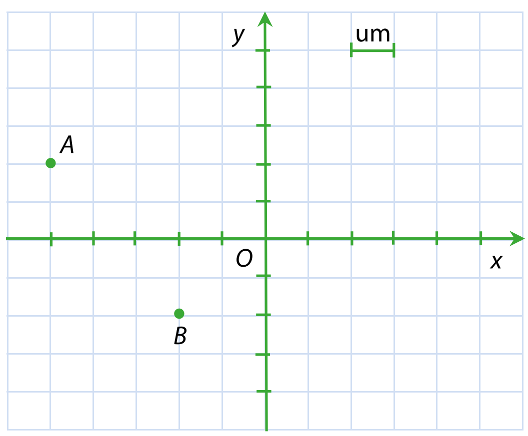
## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

Se consideră sistemul de axe ortogonale din figura alăturată și reprezentarea punctelor *A* și *B* în acest sistem.

**a)** Abscisa punctului *A* este 2. **A** **F**
**b)** Ordonata punctului *A* este –5. **A** **F**
**c)** Coordonatele punctului *B* sunt numerele reale –2 și –2. **A** **F**




**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**

Se consideră următoarele puncte: *A*(4, 3), *B*(–4, 3), *C*(4, –3) și *D*(–4, –4), reprezentate într-un sistem de axe ortogonale *xOy*.

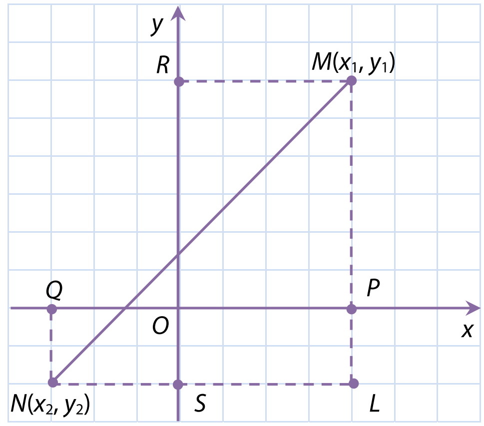
**a)** Simetrice față de originea sistemului de axe ortogonale sunt punctele … **1)** *A* și *B*;
**b)** Simetrice față de axa absciselor sunt punctele … **2)** *A* și *D*;
**c)** Simetrice față de axa ordonatelor sunt punctele … **3)** *A* și *C*;
**4)** *B* și *C*.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

Se consideră punctele *A*(2, 3) și *B*(*b*, –2). Dacă dreapta *AB* este paralelă cu axa ordonatelor sistemului de axe ortogonale, atunci *b* este egal cu ☐.

# LECȚIA 4 Distanța dintre două puncte din plan

## Rezolvăm împreună




Se consideră punctele $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$ din figura alăturată.

**a)** Determină coordonatele punctelor $P$ și $R$.

**b)** Determină coordonatele punctelor $Q$ și $S$.

**c)** Calculează distanța dintre punctele $P$ și $Q$.

**d)** Determină lungimea segmentului $LN$.

**e)** Calculează distanța dintre punctele $R$ și $S$ și determină lungimea segmentului $LM$.

**f)** Calculează distanța $MN$.

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

**a)** Punctul $M(x_1, y_1)$ permite să stabilim coordonatele punctelor $P$ și $R$, care sunt situate pe axa $Ox$, respectiv $Oy$. Astfel, rezultă $P(x_1, 0)$ și $R(0, y_1)$.

**b)** Analog, punctul $N(x_2, y_2)$ permite să stabilim coordonatele punctelor $Q$ și $S$. Rezultă: $Q(x_2, 0)$ și $S(0, y_2)$.

**c)** Calculăm distanța dintre punctele $P$ și $Q$, situate pe axa absciselor: $PQ = |x_2 - x_1|$.

**d)** Deoarece segmentele $PQ$ și $LN$ sunt congruente, rezultă că $LN = |x_2 - x_1|$.

**e)** Calculăm distanța dintre $R$ și $S$, aflate pe axa ordonatelor: $RS = |y_2 - y_1|$, iar din congruența segmentelor $RS$ și $ML$ rezultă că $ML = |y_2 - y_1|$.

**f)** Considerăm triunghiul $MLN$, dreptunghic în $L$, și aplicăm teorema lui Pitagora. Rezultă: $MN^2 = LN^2 + LM^2$, de unde $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

### Reține!

- Dacă $M(x_1, y_1)$ și $N(x_2, y_2)$ sunt două puncte ale planului, atunci distanța dintre ele se calculează astfel:
$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$
- Cazuri particulare:
  - dacă $P$ și $Q$ sunt două puncte situate pe axa absciselor, atunci: $P(x_1, 0)$, $Q(x_2, 0)$ și $PQ = |x_2 - x_1|$;
  - dacă $P$ și $Q$ sunt două puncte situate pe axa ordonatelor, atunci: $P(0, y_1)$, $Q(0, y_2)$ și $PQ = |y_2 - y_1|$.

## Aplicăm cunoștințele

Într-un sistem de axe ortogonale în plan, se consideră punctul $P(1, 0)$ și mulțimea $\mathcal{M}$ a tuturor punctelor $Q$ din plan, cu proprietatea că $PQ = 3$ (um).

**a)** Cu ajutorul unui desen, arată că mulțimea punctelor $Q$ din plan cu proprietatea că $PQ = 3$ (um) are cel puțin patru elemente.

**b)** Folosind eventual cunoștințe de geometrie, arată că mulțimea $\mathcal{M}$ este infinită.

**c)** Având în vedere că orice punct din plan se identifică cu o pereche ordonată de numere reale, arată că mulțimea $\mathcal{M}$ conține cel puțin patru perechi de numere întregi.

**d)** Descrie mulțimea $\mathcal{M}$ cu ajutorul perechilor ordonate de numere reale $(x, y)$, unde $x$ și $y$ sunt coordonatele unui punct $Q$, care aparține mulțimii.

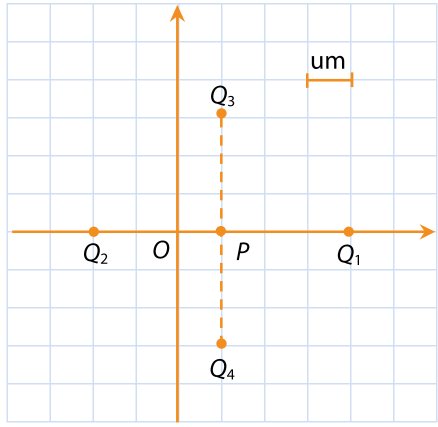
***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Desenăm sistemul de axe ortogonale, evidențiem *unitatea de măsură* (um) și desenăm punctul $P(1, 0)$. Cele patru elemente ale mulțimii $\mathcal{M}$ sunt punctele $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$, care se obțin astfel:

– punctele $Q_1$ și $Q_2$ sunt desenate la dreapta, respectiv la stânga punctului $P$, astfel încât $PQ_1 = 3$ (um) și $PQ_2 = 3$ (um);

– punctele $Q_3$ și $Q_4$ sunt desenate pe perpendiculara în punctul $P$ pe axa absciselor, de o parte și de alta a punctului $P$, astfel încât $PQ_3 = 3$ (um) și $PQ_4 = 3$ (um).

**b)** Punctele $Q$ din plan cu proprietatea că $PQ = 3$ (um) sunt puncte ale unui cerc. Prin urmare, mulțimea $\mathscr{M}$ este cercul cu centrul în punctul $P$ și cu raza egală cu 3 (um).
**c)** Din desen rezultă coordonatele punctelor $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ astfel: $Q_1(4, 0)$, $Q_2(-2, 0)$, $Q_3(1, 3)$ și $Q_4(1, -3)$. Cum punctele $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ aparțin cercului cu centrul în punctul $P$ și cu raza egală cu 3 (um), rezultă că perechile de numere întregi $(4, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 3)$, $(1, -3)$ aparțin mulțimii $\mathscr{M}$.
**d)** Dacă $Q$ este un punct oarecare din mulțimea $\mathscr{M}$, iar perechea ordonată de numere reale $(x, y)$ reprezintă coordonatele acestui punct, atunci $PQ = 3$ se poate scrie: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3$ sau $(x - 1)^2 + y^2 = 9$. Prin urmare, $\mathscr{M} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}$ și $(x - 1)^2 + y^2 = 9\}$.




## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Calculează lungimea segmentului $AB$, dacă:
**a)** $A(0, 3), B(0, 3)$; **b)** $A(2, -5), B(-2, -3)$; **c)** $A(-1, 1), B(2, 5)$;
**d)** $A(-3, 0), B(0, -4)$; **e)** $A(1, 0), B(-3, 5)$; **f)** $A(-1, -2), B(3, 2)$.

**2** Calculează lungimea segmentului $AB$, dacă:
**a)** $A(-2, 3), B(4, 0)$; **b)** $A(-2, -3), B(-4, 0)$; **c)** $A(-3, 7), B(2, -5)$;
**d)** $A\left(\sqrt{3}, \sqrt{5}\right), B\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{5}\right)$; **e)** $A\left(-\sqrt{3}, \sqrt{5}\right), B\left(\sqrt{3}, -\sqrt{5}\right)$; **f)** $A\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), B\left(-\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$.

**3** Într-un sistem de axe ortogonale $xOy$, se consideră punctele: $A(-3, 0)$, $B(0, -p)$, $C(3, 0)$, $D(0, p)$ și $O(0, 0)$, unde $p$ este un număr real pozitiv.
**a)** Completează următoarele enunțuri:
*Punctele A, O, C sunt coliniare, deoarece aparțin axei … .*
*Punctele B, O, D sunt coliniare, deoarece aparțin axei … .*
**b)** Calculează lungimile segmentelor: $OA$, $OC$, $OB$ și $OD$.
**c)** Completează următorul text:
*Patrulaterul ABCD este un paralelogram, deoarece diagonalele lui … . Pentru că diagonalele sunt …, paralelogramul ABCD este romb.*
**d)** Calculează lungimile laturilor rombului.
**e)** Calculează lungimile diagonalelor rombului.
**f)** Arată că $AD \parallel BC$.
**g)** Demonstrează că, pentru $p = 3$, $\sphericalangle ADC = 90°$.

**4** În plan se consideră un sistem de axe ortogonale $xOy$ (figura 1). Pentru orice număr real $x$ se consideră punctul care are abscisa $x$ și ordonata $y = 2x + 1$. Astfel, pentru $x \in \{-2, 1, 2\}$ rezultă trei puncte: $A$, $B$, respectiv $C$.
**a)** Calculează coordonatele celor trei puncte.
**b)** Reprezintă cele trei puncte.
**c)** Calculează lungimile segmentelor $AB$, $AC$ și $BC$.
**d)** Demonstrează că cele trei puncte sunt coliniare.
*Indicații:* **a)** Pentru $x = -2$ rezultă că $y = 2 \cdot (-2) + 1$ și $A(-2, -3)$.
**d)** Se demonstrează că $AC = AB + BC$.

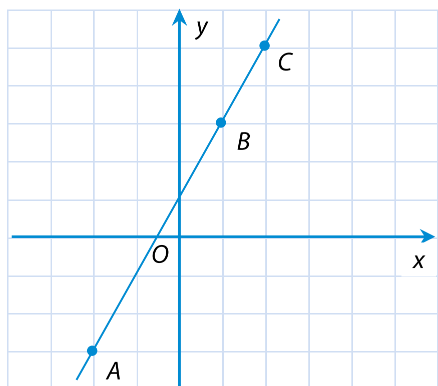


*Fig. 1*

**5** În plan se consideră un sistem de axe ortogonale $xOy$ și punctele $A(-1, 5)$, $B(2, 2)$, $C(4, 4)$.
**a)** Reprezintă cele trei puncte. **b)** Demonstrează că $\sphericalangle ABC = 90°$.
*Indicație:* **b)** Se calculează $AB^2 + BC^2$ și $AC^2$ și se aplică reciproca teoremei lui Pitagora.

**6** În plan se consideră un sistem de axe ortogonale $xOy$. Pe axa $Ox$ se iau trei puncte oarecare: $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ și $M(x, 0)$. Se știe că punctul $M$ aparține segmentului $AB$ și că $x_1 < x_2$.
**a)** Scrie în ordine crescătoare numerele reale $x_1, x_2$ și $x$.
**b)** Calculează distanțele $AB$, $AM$ și $MB$ și demonstrează că $AB = AM + MB$.

**c)** Calculează abscisa mijlocului unui segment determinat de două puncte situate pe axa *Ox*.
**d)** Calculează ordonata mijlocului unui segment determinat de două puncte situate pe axa *Oy*.

**7** În plan se consideră un sistem ortogonal *xOy* și două puncte oarecare: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, ca în figura 2. Dacă punctul $M(x, y)$ este mijlocul segmentului *AB*, demonstrează că: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ și $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.
(*Coordonatele mijlocului unui segment determinat de două puncte din plan sunt egale cu mediile aritmetice ale coordonatelor celor două puncte.*)

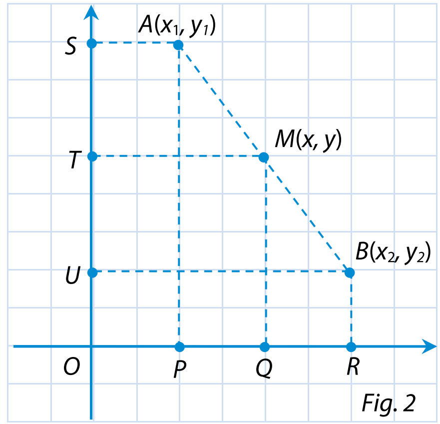


*Fig. 2*

**8** Calculează coordonatele mijlocului segmentului *AB*, dacă:
**a)** $A(0, 2)$, $B(0, 4)$;
**b)** $A(4, 0)$, $B(-2, 0)$;
**c)** $A(-1, 1)$, $B(-3, 5)$;
**d)** $A(2, -5)$, $B(-2, -3)$.

**9** Desenează un sistem de axe ortogonale *xOy*. Alege ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 1 cm.
**a)** Reprezintă punctele $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(-1, 3)$, $D(-1, -1)$, $E(2, -1)$, $F(2, 1)$.
**b)** Calculează lungimile segmentelor *AB* și *CE*.
**c)** Calculează aria triunghiului *CDE* și aria trapezului *ADEF*.

**10** **a)** Desenează în caietul de matematică un sistem de axe ortogonale *xOy*. Alege ca unitate de măsură segmentul cu lungimea de 1 cm.
**b)** Reprezintă punctele: $A(-2, 1)$, $B(3, 1)$, $C(7, 3)$ și $D(0, 5)$.
**c)** Desenează patrulaterul *ABCD*.
**d)** Dacă *E* este punctul de pe axa ordonatelor pentru care triunghiul *ADE* este isoscel, cu baza *DE*, calculează coordonatele punctului *E*.
**e)** Dacă punctul *F* este simetricul punctului *C* față de dreapta *AB*, precizează coordonatele punctului *F*.
**f)** Numește dreapta care este axă de simetrie pentru poligonul *ADCFE*.
**g)** Arată că poligonul *DEFC* este trapez isoscel.
**h)** Calculează aria trapezului.
**i)** Calculează perimetrul trapezului, cu două zecimale exacte.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Două puncte situate pe aceeași dreaptă orizontală au aceeași ordonată. **A F**

**b)** Fie $A(-2)$ și $B(3)$ două puncte reprezentate pe o axă a numerelor. Distanța dintre punctele *A* și *B* este egală cu 5 unități de măsură. **A F**

**c)** Fie $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ două puncte reprezentate într-un sistem de axe ortogonale. Distanța dintre punctele *A* și *B* este $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**

Se consideră punctele $A(-3, -4)$, $B(1, -1)$ și $C(5, 2)$, reprezentate într-un sistem de axe ortogonale.

| | |
|---|---|
| **a)** Distanța dintre punctele *A* și *B* este egală cu ... | **1)** 2 um; |
| **b)** Distanța dintre punctele *A* și *C* este egală cu ... | **2)** $\sqrt{2}$ um; |
| **c)** Distanța dintre mijlocul segmentului *AC* și originea sistemului de axe ortogonale este egală cu ... | **3)** 5 um; |
| | **4)** 10 um. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

Dacă distanța dintre punctele $A(0, 1)$ și $B(x, x + 1)$ este egală cu $5\sqrt{2}$ unități de măsură, atunci *x* este egal cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 5 Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. Poligonul frecvențelor

## Ne amintim

- datele statistice se reprezintă prin: **tabele**, **diagrame** sau **grafice**;
- în tabele, **datele sunt organizate pe linii** și **pe coloane**, în funcție de specificul acestora;
- în funcție de modul de reprezentare a datelor, o diagramă poate fi: **diagramă prin puncte**, **diagramă de tip coloană**, **diagramă de tip linie**, **diagramă circulară** etc.;
- reprezentarea unei diagrame cu ajutorul unor softuri matematice.

## Rezolvăm împreună

Rezultatele obținute de elevii unei clase a VII-a la o probă de evaluare au fost sistematizate de profesorul clasei în tabelul alăturat.

| Nota | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numărul de elevi | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 5 | 3 | 1 |
| Numărul de elevi (în procente) | 4% | 8% | 12% | ?% | 24% | 20% | 12% | 4% |

**a)** Exprimă în procente numărul elevilor care au fost evaluați cu nota 6.

**b)** Reprezintă numărul de elevi *în funcție* de nota obținută, cu ajutorul unei *diagrame de tip coloană*.

**c)** Reprezintă numărul de elevi *în funcție* de nota obținută, cu ajutorul unei *diagrame prin puncte*.

**d)** Reprezintă numărul de elevi *în funcție* de nota obținută, cu ajutorul unei *diagrame prin linii*.

**e)** Reprezintă procentul elevilor *în funcție* de nota obținută, cu ajutorul unei *diagrame circulare*.

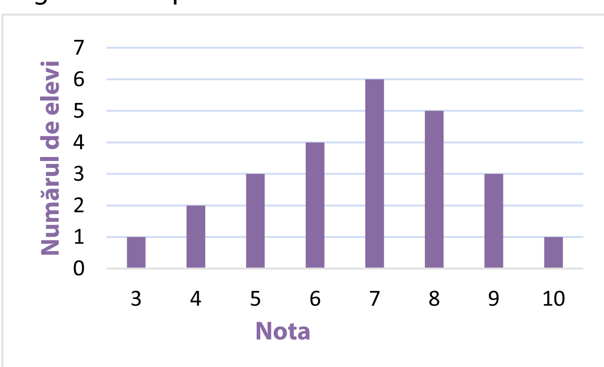
***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Pentru a exprima în procente numărul elevilor care au fost evaluați cu nota 6, calculăm întâi *numărul tuturor elevilor evaluați*: $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 5 + 3 + 1 = 25$. Numărul total de elevi evaluați, adică cei 25 de elevi, reprezintă procentul de 100%. Pentru a calcula ce procent din totalul elevilor reprezintă cei 4 elevi evaluați cu nota 6, aplicăm regula de trei simplă și obținem că procentul elevilor evaluați cu nota 6 este de 16%.

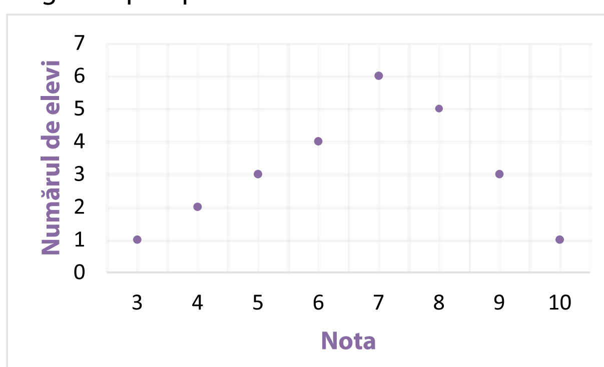
25 elevi .................... 100%
4 elevi ......................... $x$%

$$\Rightarrow x = \frac{4 \cdot 100}{25} = 16$$

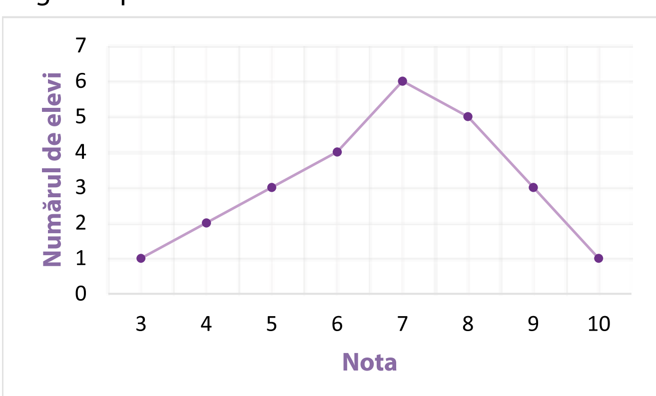
**b)** Diagrama de tip coloană:



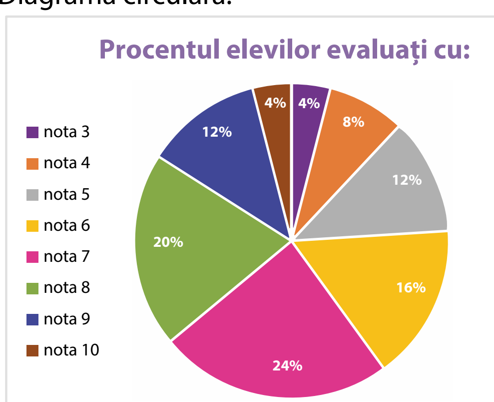

**c)** Diagrama prin puncte:




**d)** Diagrama prin linii:




**e)** Diagrama circulară:

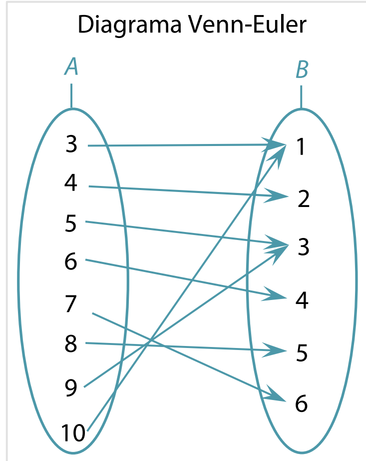


## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Constatăm că elevii au fost grupați *în funcție* de nota primită la evaluare, adică numărul de elevi depinde de nota primită.

Mai precis, dacă notăm cu $A$ mulțimea notelor acordate la evaluare, rezultă că $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Dacă notăm cu $y$ numărul elevilor care au fost evaluați cu nota $x$, rezultă că $y$ aparține mulțimii $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Astfel, constatăm că fiecărei note $x$, element al mulțimii $A$, îi corespunde un singur număr natural al elevilor care au obținut nota $x$, notat cu $y$, $y$ fiind element al mulțimii $B$. Spunem că *$y$ este frecvența valorii $x$* și că între elementele mulțimii $A$ și elementele mulțimii $B$ are loc o *dependență funcțională*.

*Graficul dependenței funcționale* de la mulțimea $A$ la mulțimea $B$ este mulțimea perechilor $(x, y)$, $x \in A$, $y \in B$, astfel încât $x \to y$, adică elementului $x$ din mulțimea $A$ îi corespunde elementul $y$ din mulțimea $B$. Această corespondență se observă cu ușurință în diagrama prin puncte, dar poate fi pusă în evidență și cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler, ca în figura alăturată.




### Reține!

- Vom spune că între două mulțimi $A$ și $B$ are loc o **dependență funcțională**, dacă, printr-o regulă oarecare, facem ca fiecărui element al mulțimii $A$ să-i corespundă un singur element al mulțimii $B$.
- **Graficul dependenței funcționale** de la mulțimea $A$ la mulțimea $B$ este mulțimea perechilor ordonate $(x, y)$, cu proprietatea că elementului $x$ din mulțimea $A$ îi corespunde elementul $y$ din mulțimea $B$.
- Dacă $A$ și $B$ sunt mulțimi finite de numere reale, atunci graficul dependenței funcționale de la mulțimea $A$ la mulțimea $B$ se reprezintă într-un sistem de axe ortogonale printr-o mulțime de puncte. Linia frântă determinată de segmentele obținute unind, în ordine, punctele reprezentării grafice este **poligonul frecvențelor**.

## Aplicăm cunoștințele

**a)** Un kilogram de cartofi costă 1,5 lei. Copiază, calculează și completează următorul tabel:

| Cantitatea de cartofi (în kilograme) | 1 | 2 | 4 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| Costul cantității de cartofi (în lei) | 1,5 | ? | ? | ? | ? |

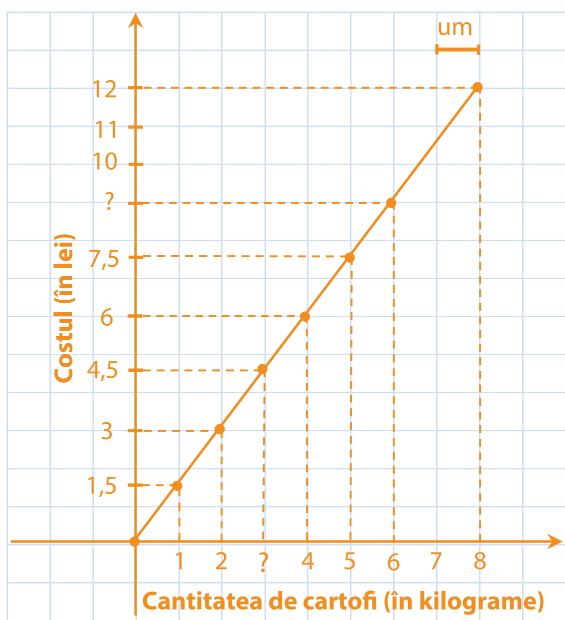
**b)** Alăturat este desenat un sistem de axe ortogonale, în care pe axa absciselor este reprezentată *cantitatea de cartofi*, iar pe axa ordonatelor este reprezentat *costul cantității* respective. Folosește graficul pentru a răspunde la următoarele întrebări:

Cât costă 6 kg de cartofi?

Câte kilograme de cartofi poți să cumperi cu 4,5 lei?

**c)** Notăm cu $x$ o cantitate oarecare de cartofi și cu $y$, costul acesteia. Exprimă pe $y$ în funcție de $x$:

$$y = x \ldots$$




***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

**a)** Deoarece prețul unui kilogram de cartofi este egal cu 1,5 lei, înmulțind prima linie a tabelului cu 1,5, determinăm numerele din linia a doua a tabelului: 1,5; 3; 6; 7,5; 12.

**b)** Din lectura graficului rezultă că 6 kg de cartofi costă 9 lei, iar cu 4,5 lei poți cumpăra 3 kg de cartofi.

**c)** Costul și cantitatea de cartofi sunt mărimi direct proporționale, raportul dintre cost și cantitate fiind egal cu prețul unui kilogram de cartofi. Rezultă că $\frac{y}{x} = 1{,}5$ (prețul unui kilogram de cartofi), de unde $y = 1{,}5 \cdot x$.

Observă că orice punct $P(x, y)$, unde $x$ este o cantitate oarecare de cartofi și $y$ este costul acesteia, aparține unei drepte care trece prin originea sistemului de axe ortogonale $xOy$. Prin urmare, punctele dependenței funcționale $y = 1{,}5 \cdot x$ pentru $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și $y \in \mathbb{R}$ sunt coliniare.

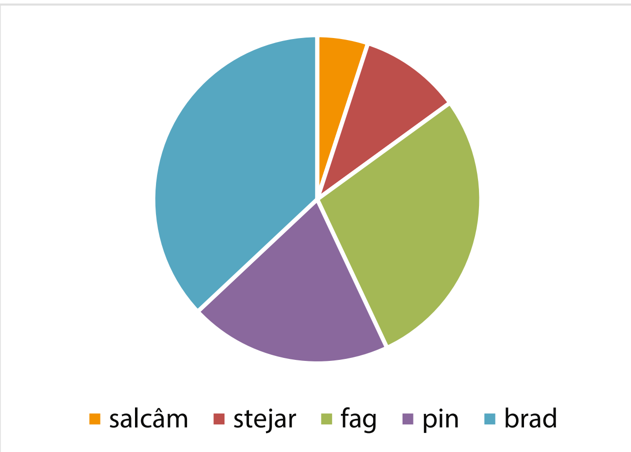
## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Directorul unei școli gimnaziale a realizat o situație privind numărul fetelor și cel al băieților pe clase. Tabelul alăturat rezumă datele obținute.

**a)** Copiază și completează tabelul.
**b)** Câți băieți sunt în clasele a VII-a?
**c)** Câți elevi sunt în clasele a VI-a?
**d)** Care este numărul fetelor din școală?
**e)** Care este numărul băieților din școală?

| | Fete | Băieți | Total |
|---|---|---|---|
| Clasele a V-a | 60 | 70 | … |
| Clasele a VI-a | 70 | 65 | … |
| Clasele a VII-a | 75 | … | 160 |
| Clasele a VIII-a | … | 70 | 140 |
| Total | … | … | … |

**2** **a)** Diagrama circulară de mai jos reprezintă varietatea speciilor de arbori dintr-o pădure. Observând diagrama, completează tabelul asociat acesteia cu următoarele procente: 5%, 10%, 20%, 28%, 37%, corespunzătoare speciilor de arbori din pădure.

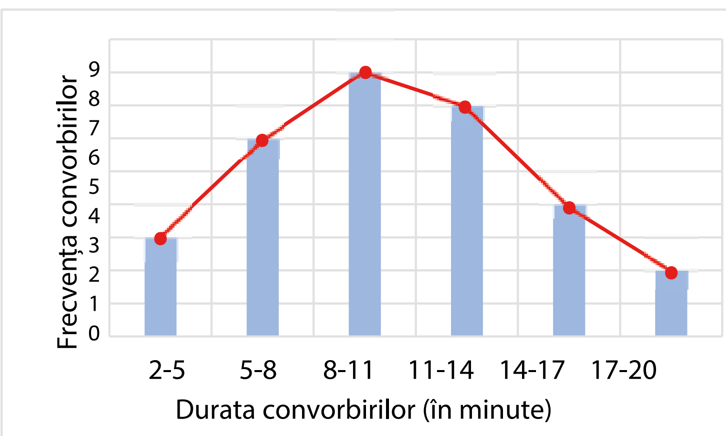



| Specia | Procentul |
|---|---|
| salcâm | … |
| stejar | … |
| fag | … |
| pin | … |
| brad | … |

**b)** Folosind computerul, deschide o *foaie de lucru Microsoft Excel*, introdu tabelul de date în celulele foii de lucru și creează diagrama de tip coloană corespunzătoare tabelului.

**3** Pentru 30 de convorbiri telefonice s-au înregistrat duratele (în minute). Informațiile sunt cele oferite de poligonul frecvențelor. Calculează din totalul convorbirilor:

**a)** procentul convorbirilor cu durata între 8 și 11 minute;
**b)** procentul convorbirilor cu durata mai mare decât 8 minute.



**4** În tabelul de mai jos este prezentat consumul anual al principalelor surse de energie în anii 1973 și 2003. Valorile sunt exprimate în milioane *tone echivalent petrol* (tep).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Anul** | **Cărbune** | **Hidroelectrică** | **Gaze** | **Nucleară** | **Regenerabilă** | **Petrol** | **Altele** | **Total** |
| 2 | 1973 | 1496,6 | 108,6 | 977,5 | 54,3 | 675,8 | 2715,3 | 6,1 | |
| 3 | 2003 | 2579,1 | 232,5 | 2240,8 | 687,1 | 1141,6 | 3636,1 | 52,8 | |
| 4 | | | | | | | | | % |

1 tep = energia eliberată prin arderea unei tone de petrol

**a)** Folosind computerul, deschide o *foaie de lucru Microsoft Excel* și scrie tabelul de date în celulele foii de lucru. Pe rândul 4 scrie totalul coloanelor, exceptând-o pe prima.

**b)** În celula B4 a tabelului de mai sus, scrie următoarea formulă de calcul: =((B3-B2)/B2)*100. Ce reprezintă rezultatul obținut?

**c)** După energia nucleară, care este sursa de energie cu cea mai mare creștere procentuală? Care este acest procent?

**d)** Reprezintă printr-o diagramă de tip coloană creșterea procentuală a consumului surselor de energie în perioada 1973-2003.

**e)** Care este procentul consumului de energie din 2003 rezultat din folosirea cărbunelui?

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

Se consideră dependența funcțională $x \to y$, de la mulțimea $A = \{-\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}\}$ la mulțimea $\mathbb{R}$, dată de regula $y = \sqrt{3}x + 1$.

**a)** Pentru $x = -\sqrt{3}$, $y$ este egal cu –2. **A** **F**

**b)** Pentru $x = 0$, $y$ este egal cu 1. **A** **F**

**c)** Pentru $x = 2\sqrt{3}$, $y$ este egal cu 5. **A** **F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**

În tabelul de mai jos este redată frecvența valorilor temperaturilor din luna noiembrie.

| **Temperatura** | 1° | 2° | 3° | 5° | 6° | 8° | 9° | 10° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Frecvența** | 4 | 3 | 2 | 5 | 5 | 6 | 1 | 4 |

**a)** Temperatura cu frecvența cea mai mare a fost egală cu … **1)** 9°;

**b)** Temperatura cu frecvența cea mai mică a fost egală cu … **2)** 6°;

**c)** Media temperaturilor din luna noiembrie, rotunjită la întregi, este egală cu … **3)** 1°;

**4)** 8°.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

La un concurs au fost date 3 probleme. În tabelul următor, fiecărei probleme i se asociază numărul elevilor care au rezolvat-o corect. Se știe că au fost 165 de rezolvări corecte.

| **Problema** | I | II | III |
|---|---|---|---|
| **Numărul de elevi** | $x$ | $2x + 17$ | $3x - 2$ |

Problema numărul II a fost rezolvată de ☐ elevi.

# 1. PROBLEME RECAPITULATIVE

**1** În tabelul alăturat este prezentată o dependență funcțională. Reprezintă această dependență funcțională:

**a)** cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler;

**b)** într-un sistem de axe ortogonale.

| *x* | –3 | –1 | 0 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *y* | 5 | 3 | 2 | 4 | –1 | –2 |

**2** Se consideră mulțimile $A = \{-1, 0, 2\}$ și $B = \{-2, 0, 1\}$.

**a)** Determină $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$.

**b)** Pentru fiecare produs cartezian calculat la punctul precedent, desenează câte un sistem de axe ortogonale și reprezintă produsele.

**3** **a)** Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale punctele $M(-2, -2)$, $N(2, -2)$ și $P(2, 2)$.

**b)** Determină coordonatele punctului $Q$, știind că $MNPQ$ este un pătrat.

**c)** Scrie coordonatele punctelor $A$, $B$, $C$ și $D$, știind că acestea sunt mijloacele segmentelor $MN$, $NP$, $PQ$ și $QM$.

**4** Determină numărul real $m$ în fiecare caz, astfel încât:

**a)** $M(-3, m)$, $N(2, m + 1)$, $P(\sqrt{5}, 2m+1)$ să aparțină axei absciselor;

**b)** $Q(m, 2)$, $R(m\sqrt{2}-1, -3)$, $S(-m + 1, -1)$ să aparțină axei ordonatelor.

**5** Perimetrul unui dreptunghi este de 40 cm.

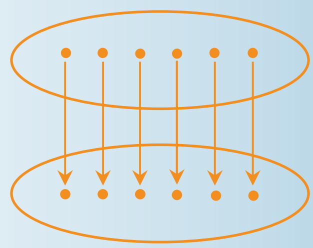
**a)** Exprimă lungimea dreptunghiului în funcție de perimetru și de lățime.

**b)** Calculează lungimea dreptunghiului, știind că lățimea ia valorile: 2 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm.

**c)** Completează în tabelul de mai jos valorile obținute la b).

| **Lățimea (în cm)** | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Lungimea (în cm)** | | | | | | |

**d)** Completează datele din tabel în diagrama alăturată.



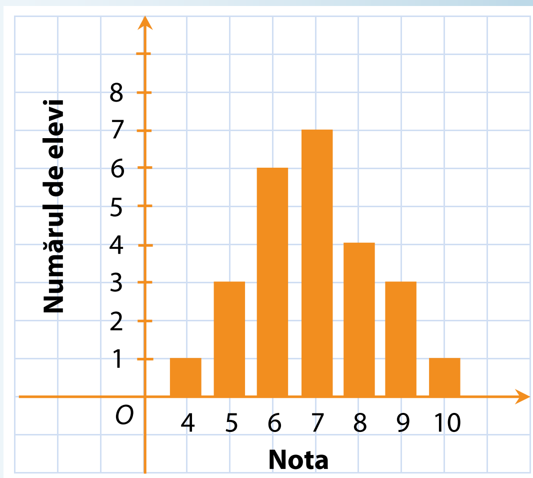
**6** Rezultatele obținute de elevii unei clase la un test de evaluare inițială sunt reprezentate în diagrama alăturată.

**a)** Desenează poligonul frecvențelor notelor.

**b)** Completează tabelul de mai jos cu datele din diagramă. Exprimă frecvența notelor în procente și completeaz-o în tabel.

| **Nota** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Numărul de elevi** | | | | | | | |
| **Frecvența în procente** | | | | | | | |

**c)** Precizează:
- numărul elevilor care au obținut cel puțin nota 7;
- numărul elevilor care au obținut cel mult nota 8;
- media clasei.




**7** Fie punctele $A(-4, -2)$, $B(-1, -6)$, $C(2, -2)$ și $D(-1, 4)$.

**a)** Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale punctele $A$, $B$, $C$ și $D$, alegând o unitate de măsură convenabilă.

**b)** Reprezintă în același sistem de axe ortogonale punctul $A'$, simetricul punctului $A$ față de axa absciselor, punctul $B'$, simetricul punctului $B$ față de axa ordonatelor, și punctul $C'$, simetricul punctului $C$ față de originea sistemului de axe ortogonale.

**c)** Precizează coordonatele punctelor $A'$, $B'$, $C'$.

**d)** Calculează lungimile segmentelor $AA'$, $BB'$, $CC'$.

**e)** Determină coordonatele mijlocului segmentului $AC$.

**f)** Calculează perimetrul patrulaterului $ABCD$.

**8** Se consideră punctele $A(2, 0)$, $B(-4, 2)$ și $C(0, 6)$.

**a)** Reprezintă punctele într-un sistem de axe ortogonale.

**b)** Calculează lungimile laturilor triunghiului $ABC$ și stabilește natura acestui triunghi.

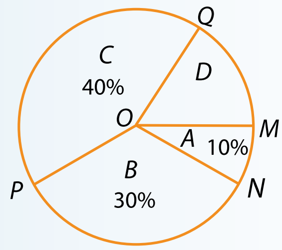
**c)** Calculează coordonatele mijlocului segmentului $BC$ și lungimea înălțimii din $A$ a triunghiului $ABC$.

**d)** Calculează aria triunghiului $ABC$.

# 2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Diagrama de mai jos reprezintă compoziția chimică, în procente, a unui medicament pentru care s-au folosit ingredientele $A$, $B$, $C$, $D$.




**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

(5p) 1. Ingredientul $D$ se află în compoziția medicamentului în procent de … .

(5p) 2. Măsura unghiului la centru $MON$ este egală cu … .

(5p) 3. Măsura arcului mic $PQ$ este egală cu … .

(5p) 4. Suma măsurilor unghiurilor $MON$ și $POQ$ este egală cu … .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**

Dacă un comprimat are 2 g, atunci cantitatea pentru 50 de comprimate din ingredientul:

| | A | B |
|---|---|---|
| (5p) | 1. $A$ este egală cu … | a) 50 g; |
| (5p) | 2. $B$ este egală cu … | b) 10 g; |
| (5p) | 3. $C$ este egală cu … | c) 20 g; |
| (5p) | 4. $D$ este egală cu … | d) 30 g; |
| | | e) 40 g. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Dacă $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (a, 5), (b, 4), (5, 5)\}$, atunci suma $a + b$ este egală cu:
A. 8; B. 6; C. 9; D. 7.

(5p) 2. Simetricul punctului $A(-1, 2)$ față de axa absciselor este punctul $B$. Coordonatele punctului $B$ sunt:
A. $(1, -2)$; B. $(-1, -2)$; C. $(1, 2)$; D. $(-1, 2)$.

(5p) 3. Simetricul punctului $C(2, -3)$ față de axa ordonatelor este punctul $D$. Coordonatele punctului $D$ sunt:
A. $(-2, -3)$; B. $(-2, 3)$; C. $(2, 3)$; D. $(2, -3)$.

(5p) 4. Simetricul punctului $M(-2, 3)$ față de originea sistemului de axe ortogonale este punctul $N$. Coordonatele punctului $N$ sunt:
A. $(-2, 3)$; B. $(2, 3)$; C. $(2, -3)$; D. $(-2, -3)$.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

(5p) IV. a) Demonstrează că punctele $A(-4, -6)$, $B(0, -3)$ și $C(4, 0)$ sunt coliniare.

(10p) b) Se consideră punctele $M(-1, 5)$, $N(5, 5)$ și $P(2, 1)$. Demonstrează că triunghiul $MNP$ este isoscel și calculează perimetrul acestuia.

V. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 2\}$ și $B = \mathbb{R}$. Între mulțimile $A$ și $B$ se stabilește o dependență funcțională dată de regula $x \rightarrow y$ și $y = -x + 2$.

(5p) a) Reprezintă această dependență funcțională cu ajutorul unui tabel.

(5p) b) Desenează un sistem de axe ortogonale $xOy$.

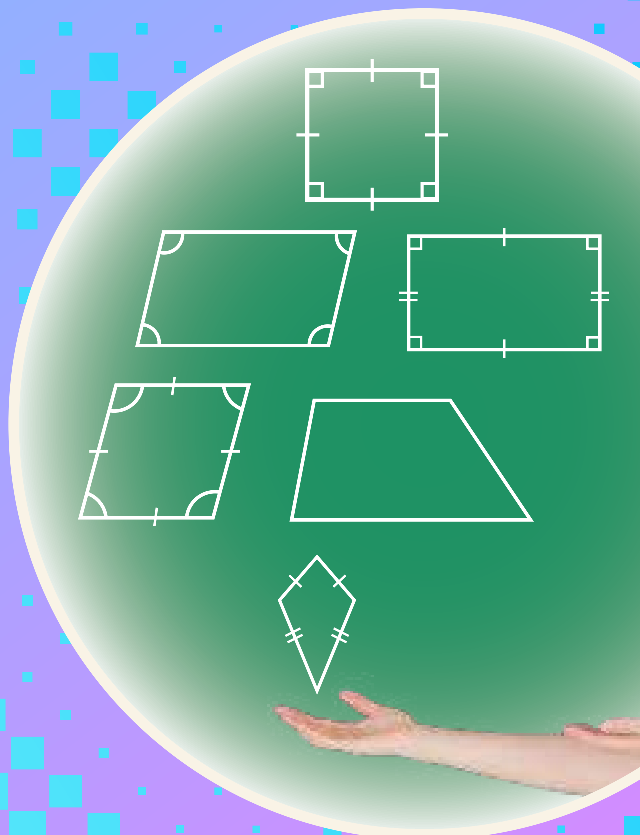
(5p) c) Reprezintă dependența funcțională cu ajutorul unui grafic.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# 4

# PATRULATERUL



# UNITATEA: PATRULATERUL

## LECȚIA 1 Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex

### Ne amintim

- trei puncte necoliniare $A$, $B$, $C$ determină triunghiul $ABC$ (figura 1);
- elementele unui triunghi sunt: vârfurile, laturile și unghiurile;
- suma măsurilor unghiurilor unui triunghi $ABC$ este egală cu 180°:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180^\circ.$$

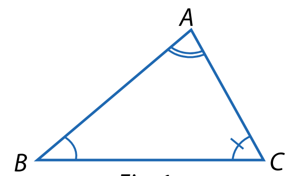


*Fig. 1*

### Rezolvăm împreună

Calculează suma măsurilor unghiurilor $A$, $B$, $C$ și $D$ din figura 2.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Aplicăm teorema care se referă la suma măsurilor unghiurilor unui triunghi în triunghiurile $ABC$ și $ACD$.

Rezultă: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB = 180^\circ$ și $\sphericalangle CDA + \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = 180^\circ$.

Adunăm cele două egalități membru cu membru și aranjăm rezultatul astfel:

$$\sphericalangle ABC + (\sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD) + \sphericalangle CDA + (\sphericalangle DAC + \sphericalangle CAB) = 180^\circ + 180^\circ.$$

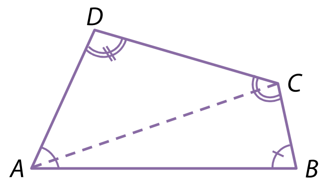


*Fig. 2*

Dar $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$ și $\sphericalangle DAC + \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAB$. Ținând cont de aceste egalități, obținem:

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA + \sphericalangle DAB = 360^\circ \text{ sau } \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle A = 360^\circ,$$

de unde rezultă că suma măsurilor unghiurilor $A$, $B$, $C$ și $D$ din figura 2 este egală cu 360°.

### Observăm și descoperim cunoștințe noi

Dacă în figura 2 nu marcăm unghiurile și nu punem în evidență segmentul $AC$, rezultă figura 3. Privim această figură și observăm următoarele caracteristici:

**1) oricare trei dintre cele patru puncte, *A, B, C, D*, nu sunt coliniare;**

**2) segmentele *AB* și *CD*, respectiv *AD* și *BC* nu se intersectează;**

**3) figura este reuniunea segmentelor: *AB, BC, CD* și *DA*.**

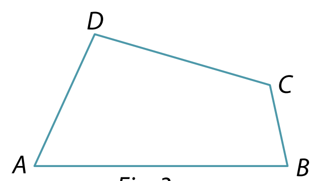


*Fig. 3*

O astfel de figură se numește patrulater, iar punctele $A$, $B$, $C$, $D$ se numesc vârfurile patrulaterului.

Prin urmare, „patru-later" ar însemna patru laturi.

Patrulaterul cu vârfurile $A$, $B$, $C$, $D$ va fi notat $ABCD$ sau $ADCB$.

Ordinea vârfurilor în numirea patrulaterului este de mare importanță. Ea se stabilește astfel: se alege un vârf și, folosindu-ne de figură, următoarele vârfuri le numim fie în sensul invers rotirii acelor de ceas, fie în sensul rotirii acelor de ceas. De exemplu, dacă se alege vârful $B$, patrulaterul din figura 2 poate fi numit $BCDA$ sau $BADC$. Prin urmare, un patrulater poate fi numit în 8 moduri.

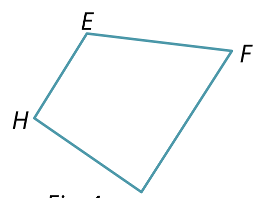


*Fig. 4*

Patrulaterul $ABCD$ din figura 3 se numește patrulater convex. Observăm că, pentru fiecare dreaptă care conține o latură, vârfurile patrulaterului ce nu aparțin acestei drepte sunt de aceeași parte a ei.

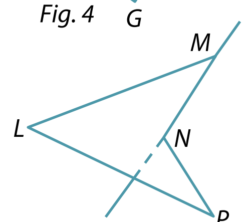


*Fig. 5*

De exemplu, vârfurile $C$ și $D$ ale patrulaterului sunt de aceeași parte a dreptei $AB$.

De asemenea, patrulaterul $EFGH$ din figura 4 este convex.

Patrulaterul $LMNP$ din figura 5 nu este convex, deoarece punctele $L$ și $P$ nu sunt de aceeași parte a dreptei $MN$, adică nu este îndeplinită condiția: pentru fiecare dreaptă care conține o latură, vârfurile patrulaterului ce nu aparțin acestei drepte sunt de aceeași parte a ei. Un astfel de patrulater se numește patrulater concav. Patrulaterul $LMNP$ din figura 5 este concav. Patrulaterul $QRST$ din figura 6 este, de asemenea, concav.

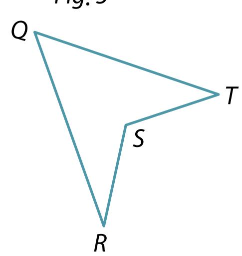
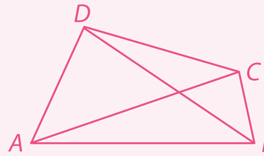


*Fig. 6*

## Reține!




- Elementele unui patrulater convex *ABCD* sunt:
  - **vârfurile** patrulaterului (punctele *A*, *B*, *C*, *D*);
  - **laturile** patrulaterului (segmentele *AB*, *BC*, *CD*, *DA*);
  - **unghiurile** patrulaterului ($\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$, $\sphericalangle DAB$);
  - **diagonalele** patrulaterului (segmentele *AC* și *BD*).
- Două laturi care au un punct comun se numesc **laturi consecutive** sau **laturi vecine** (de exemplu: laturile *BC* și *CD*).
- Două laturi care nu sunt consecutive se numesc **laturi opuse** (de exemplu: laturile *AB* și *CD*).
- Două unghiuri sunt **opuse** dacă nu au în comun o latură a patrulaterului (de exemplu: unghiurile *ABC* și *ADC* sunt opuse).
- Două unghiuri care nu sunt opuse sunt **unghiuri alăturate**.
- **Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360°.**

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Desenează un patrulater convex *ABCD* și un patrulater concav *MNPQ*.

**2** Explică de ce:
**a)** *MNPQ* din figura 7 nu este un patrulater; **b)** *EFGH* din figura 8 nu este un patrulater.

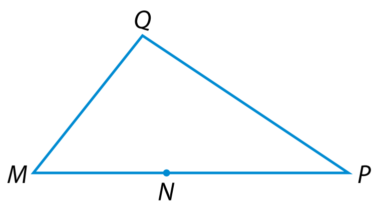



*Fig. 7*

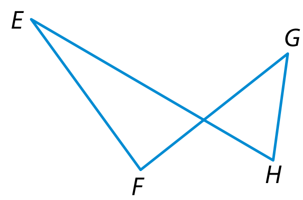



*Fig. 8*

**3** În patrulaterul convex *ABCD*, numește latura opusă laturii *BC* și unghiul opus unghiului *BCD*.

**4** Pentru un triunghi *ABC*, numește și hașurează semiplanul în care se poate găsi:
**a)** punctul *D*, astfel încât *ABDC* să fie patrulater convex;
**b)** punctul *E*, astfel încât *ABCE* să fie patrulater convex;
**c)** punctul *F*, astfel încât *AFBC* să fie patrulater convex.

**5** Știind că *ABCD* este patrulater convex și că *E* este un punct astfel încât *C* aparține segmentului *ED*, este posibil ca *ABCE* să fie patrulater? Poate fi și convex?

**6** **a)** Desenează un patrulater convex *ABCD*, în care $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 70°$ și $\sphericalangle C = 140°$. Care este măsura unghiului *D*?
**b)** Aceeași problemă, știind că $\sphericalangle A = 80°$, $\sphericalangle B = 30°$ și $\sphericalangle C = 100°$.

**7** **a)** Poți construi un patrulater convex astfel încât suma măsurilor a trei unghiuri să fie 170°?
**b)** Poți construi un patrulater convex astfel încât suma măsurilor a trei unghiuri să fie 180°?

**8** **a)** Construiește un patrulater convex *ABCD*, astfel încât $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 30°$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$.
**b)** Unghiul *A* al patrulaterului *ABCD* din figura 9 este ascuțit, iar unghiurile *B* și *D* sunt drepte. Demonstrează că unghiul *C* este obtuz.

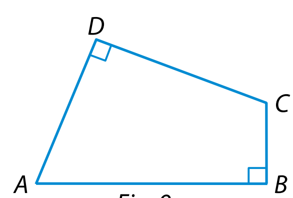



*Fig. 9*

**9** Calculează măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că ele sunt direct proporționale cu numerele 1,5, 2, 3 și, respectiv, 3,5.

**10** Calculează măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că ele sunt invers proporționale cu numerele 0,(3), 0,25, 0,2 și, respectiv, 0,1(6).

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **4,5 puncte**

Dacă *ABCD* este un patrulater convex, atunci:

**a)** punctele *A* și *B* sunt de o parte și de alta a dreptei *CD*; **A** **F**
**b)** trei dintre punctele *A*, *B*, *C* și *D* sunt coliniare; **A** **F**
**c)** segmentele *AC* și *BD* sunt diagonalele patrulaterului. **A** **F**

**2** **Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.** **2 puncte**

Se consideră un patrulater convex *ABCD* cu unghiurile *B* și *D* complementare. Atunci:

**A.** unghiurile *A* și *C* sunt ascuțite;
**B.** unghiurile *A* și *C* sunt drepte;
**C.** unghiul *A* este ascuțit și unghiul *C* este obtuz;
**D.** unghiurile *A* și *C* sunt obtuze.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2,5 puncte**

Patrulaterul convex *ABCD* are unghiurile opuse suplementare. Dacă $\sphericalangle B = x + 75°$ și $\sphericalangle D = x - 15°$, atunci $x$ este egal cu ☐.

## LECȚIA 2 Paralelogramul. Definiție și proprietăți

### Ne amintim

- criteriile de congruență a triunghiurilor;
- construcția a două drepte paralele folosind rigla și echerul;
- proprietățile unghiurilor formate de două drepte paralele cu o secantă;
- criteriile de paralelism.

### Rezolvăm împreună

**PROBLEMA 1**

Folosește rigla și echerul și construiește un patrulater cu laturile opuse paralele.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Folosind rigla și echerul, construim două drepte paralele *a* și *b* (figura 1). Notăm cu *A* și *B* punctele de intersecție a unei secante *c* cu dreptele paralele *a* și *b*. Printr-un punct *C* situat pe dreapta *b*, construim paralela la dreapta *c*, care intersectează dreapta *a* în punctul *D* (figura 2).

Patrulaterul *ABCD* are laturile opuse paralele.

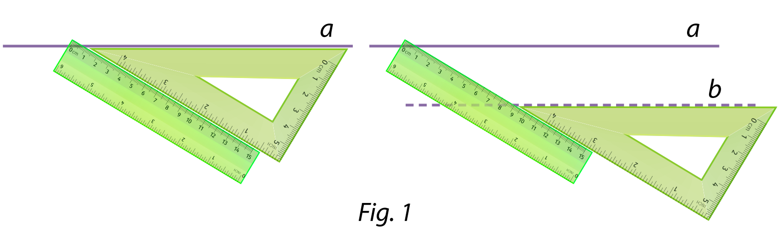



*Fig. 1*

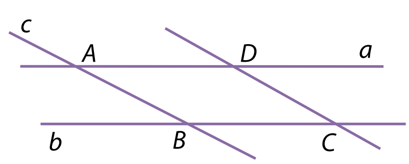



*Fig. 2*

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Rezolvarea problemei anterioare arată că există patrulatere cu laturile opuse paralele. Un patrulater care are laturile opuse paralele se numește paralelogram. Prin urmare, patrulaterul $ABCD$ din figura 2 este un paralelogram, deoarece $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$. Se pun două întrebări.

*Prima întrebare:*

**Ce proprietăți au laturile, unghiurile și diagonalele unui paralelogram?**

Răspunsul la întrebare îl găsim în figurile de mai jos. Figurile pun în evidență un paralelogram $ABCD$ și elemente ale acestuia, după cum urmează: *laturile opuse* (figura 3), *unghiurile opuse* și *unghiurile alăturate* (figura 4), respectiv *diagonalele paralelogramului* (figura 5).

Figurile sugerează că:
- laturile opuse ale paralelogramului sunt congruente (figura 3);
- unghiurile opuse ale paralelogramului sunt congruente (figura 4);
- punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului este mijlocul fiecărei diagonale (figura 5).

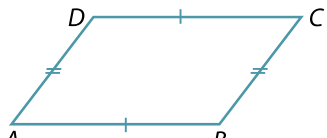


*Fig. 3*

*Fig. 4*

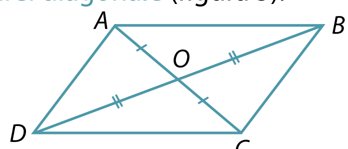


*Fig. 5*

**Problema 2**

Dacă $ABCD$ este paralelogram, demonstrează că:

**a)** laturile opuse ale paralelogramului sunt congruente (figura 3);
**b)** unghiurile alăturate ale paralelogramului sunt suplementare (figura 4);
**c)** unghiurile opuse ale paralelogramului sunt congruente (figura 4);
**d)** punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului este mijlocul fiecărei diagonale (figura 5).

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

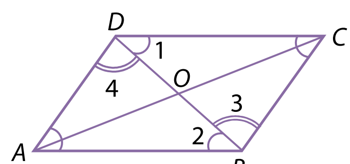


*Fig. 6*

**a)** Deoarece $ABCD$ este paralelogram, laturile opuse sunt paralele, adică $AB \parallel CD$ și $BC \parallel AD$ (figura 6). Punem în evidență diagonala $BD$.
Din $AB \parallel DC$ și $DB$ – secantă rezultă $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$, iar din $BC \parallel AD$ și $DB$ – secantă rezultă $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 4$ (două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri alterne interne congruente).
Deoarece $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$, $DB \equiv BD$ și $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 4$, deducem că triunghiurile $CDB$ și $ABD$ sunt congruente (criteriul de congruență ULU). Din congruența celor două triunghiuri rezultă $CD \equiv AB$, $CB \equiv AD$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle A$.
**b)** Din $AB \parallel CD$ și $AD$ – secantă rezultă că $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$, iar din $BC \parallel AD$ și $AB$ – secantă rezultă că $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$. Cum $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$, rezultă și că $\sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, $\sphericalangle C + \sphericalangle D = 180°$ și $\sphericalangle D + \sphericalangle A = 180°$, deci *unghiurile alăturate ale paralelogramului sunt suplementare.*
**c)** Din $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ și $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$ rezultă că $\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sphericalangle A + \sphericalangle D$, de unde $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$. Relațiile $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle A$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$ arată că *unghiurile opuse ale paralelogramului sunt congruente.*
**d)** Punem în evidență diagonala $AC$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Din demonstrația de la a) avem $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$ (1) și $AB = CD$ (2). Unghiurile $BAC$ și $DCA$ sunt unghiuri alterne interne congruente formate de $AB \parallel CD$ și secanta $AC$, adică $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DCA$ (3). Din (1), (2), (3) și cazul de congruență ULU rezultă că $\Delta BAO \equiv \Delta DCO$. Din definiția congruenței unghiurilor rezultă că $AO = CO$ și $BO = DO$, adică punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului este mijlocul fiecărei diagonale.

*A doua întrebare:*

**Ce condiții trebuie îndeplinite de laturile, de unghiurile sau de diagonalele unui patrulater pentru ca acesta să fie paralelogram?**

Pentru a răspunde la această întrebare, pe foaia cu pătrățele construim un patrulater $ABCD$, ca în figura 7, unde $AB \parallel CD$ și $AB = CD = 5$ (um).
Figura rezultată sugerează că patrulaterul $ABCD$ astfel construit este un paralelogram.

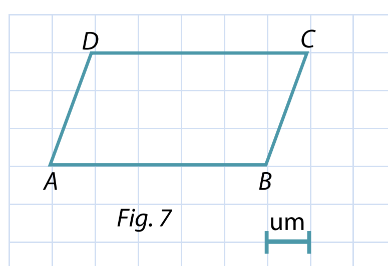


*Fig. 7*

## Problema 3

Arată că un patrulater convex este paralelogram dacă:

**a)** două laturi opuse sunt paralele și congruente;
**b)** laturile opuse sunt congruente;
**c)** unghiurile opuse sunt congruente;
**d)** unghiurile alăturate sunt suplementare;
**e)** diagonalele au același mijloc.

***Rezolvare** (activitate frontală):*

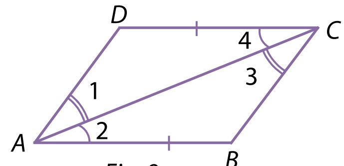


Fig. 8

**a)** Patrulaterul $ABCD$ din figura 8 are $AB \parallel CD$ și $AB \equiv CD$.
Din $AB \parallel DC$ și $AC$ – secantă rezultă $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$ (două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri alterne interne congruente). Deoarece $AB \equiv CD$, $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$ și $AC \equiv CA$, deducem că triunghiurile $BAC$ și $DCA$ sunt congruente (criteriul de congruență LUL), de unde rezultă că $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 1$.
Deoarece dreptele $AD$ și $BC$ formează cu secanta $AC$ unghiurile 1 și 3 alterne interne congruente, rezultă că $AD \parallel BC$ (criteriu de paralelism). Având laturile opuse paralele ($AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$), patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

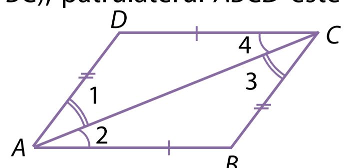


Fig. 9

**b)** Patrulaterul $ABCD$ din figura 9 are laturile opuse congruente, adică $AB \equiv CD$ și $BC \equiv AD$. Deducem că triunghiurile $ABC$ și $CDA$ sunt congruente (criteriul de congruență LLL). Din congruența celor două triunghiuri rezultă că $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$.
Deoarece dreptele $AD$ și $BC$ formează cu secanta $AC$ unghiurile 1 și 3 alterne interne congruente, rezultă că $AD \parallel BC$ (criteriu de paralelism). Analog, deoarece $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$, rezultă că $AB \parallel CD$. Având laturile opuse paralele ($AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$), patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

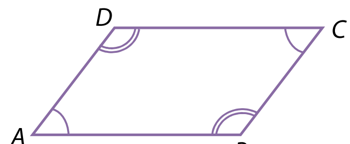


Fig. 10

**c)** Patrulaterul $ABCD$ din figura 10 are unghiurile opuse congruente ($\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$) și $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$.
Rezultă că $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle A + \sphericalangle B = 360°$, de unde $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$.
Din $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$ rezultă că $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$.
Deoarece dreptele $AB$ și $DC$ formează cu secanta $AD$ unghiurile $A$ și $D$ suplementare ($\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$), rezultă că $AB \parallel CD$ (criteriu de paralelism). Analog, deoarece dreptele $AD$ și $BC$ formează cu secanta $AB$ unghiurile $A$ și $B$ suplementare ($\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$), rezultă că $AD \parallel BC$.
Având laturile opuse paralele ($AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$), patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

**d)** Deoarece patrulaterul $ABCD$ are unghiurile alăturate suplementare, din $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$ rezultă că $AB \parallel CD$, iar din $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ rezultă $AD \parallel BC$.
Prin urmare, având laturile opuse paralele, patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

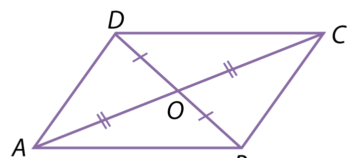


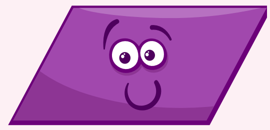
Fig. 11

**e)** Diagonalele patrulaterului $ABCD$ din figura 11 au același mijloc, adică $AO \equiv CO$ și $BO \equiv DO$, unghiurile $AOB$ și $COD$, fiind opuse la vârf, sunt congruente și $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (LUL). Din congruența celor două triunghiuri rezultă că $AB \equiv CD$. Analog, $BC \equiv DA$, din congruența triunghiurilor $BOC$ și $DOA$ (LUL).
Prin urmare, având laturile opuse congruente, patrulaterul $ABCD$ este paralelogram (conform punctului b)).

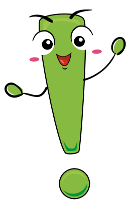
Enunțurile și rezolvările problemelor anterioare conduc la formularea următoarelor **teoreme**.

| Teorema | Teorema reciprocă |
| --- | --- |
| Laturile opuse ale unui paralelogram sunt congruente. | Patrulaterul care are laturile opuse congruente este paralelogram. |
| Două laturi opuse ale unui paralelogram sunt paralele și congruente. | Patrulaterul care are două laturi opuse paralele și congruente este paralelogram. |
| Unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt congruente. | Patrulaterul care are unghiurile opuse congruente este paralelogram. |
| Unghiurile alăturate ale unui paralelogram sunt suplementare. | Patrulaterul care are unghiurile alăturate suplementare este paralelogram. |
| Diagonalele unui paralelogram au același mijloc. | Patrulaterul ale cărui diagonale au același mijloc este paralelogram. |

## Reține!



- **Definiția paralelogramului**
  Patrulaterul care are laturile opuse paralele se numește paralelogram.
- **Proprietățile paralelogramului (referitoare la laturi, unghiuri și diagonale):**
  - laturile opuse sunt paralele;
  - laturile opuse sunt congruente;
  - unghiurile opuse sunt congruente;
  - unghiurile alăturate sunt suplementare;
  - diagonalele au același mijloc.
- **Pentru a demonstra că un patrulater este paralelogram, este suficient să arătăm că este îndeplinită una dintre următoarele condiții:**
  - patrulaterul are laturile opuse congruente;
  - patrulaterul are două laturi opuse paralele și congruente;
  - patrulaterul are unghiurile opuse congruente;
  - patrulaterul are unghiurile alăturate suplementare;
  - diagonalele patrulaterului au același mijloc.



**Atenție la exprimare!** Exprimarea „are laturile opuse paralele” nu este sinonimă cu exprimarea „are laturi opuse paralele”. De exemplu, patrulaterul *MNPQ are laturile opuse paralele* ($MN \parallel PQ$ și $MQ \parallel PN$), iar patrulaterul *EFGH are laturi opuse paralele* ($EF \parallel HG$), dar *nu are laturile opuse paralele*, deoarece $EH \nparallel FG$ (figura 12).

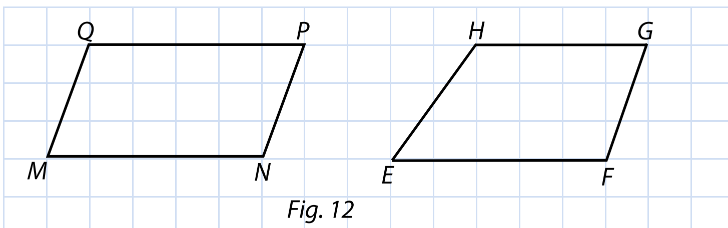



*Fig. 12*

Analog, exprimarea „are unghiurile opuse congruente” nu este sinonimă cu exprimarea „are unghiuri opuse congruente” și exprimarea „are unghiurile alăturate suplementare” nu este sinonimă cu exprimarea „are unghiuri alăturate suplementare”.

## Aplicăm cunoștințele

Se consideră două puncte $M$ și $P$. Cercul $\mathscr{C}_1$, cu centrul în punctul $M$, și cercul $\mathscr{C}_2$, cu centrul în punctul $P$, au razele congruente (figura 13). Cercul $\mathscr{C}_3$, cu centrul în punctul $P$, intersectează cercul $\mathscr{C}_1$ în punctul $Q$. Punctul $N$ este pe cercul $\mathscr{C}_2$ și $MN \equiv PQ$. Demonstrează că dreptele $MQ$ și $NP$ sunt paralele.

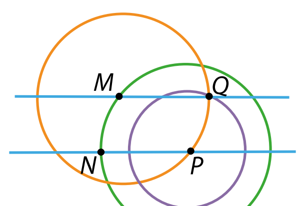



*Fig. 13*

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*
Deoarece $P$ și $Q$ sunt puncte ale cercului $\mathscr{C}_1$, rezultă că $MP \equiv MQ$. Dar $NP \equiv MP$, ca raze ale cercului $\mathscr{C}_2$. Rezultă că $NP \equiv MP \equiv MQ$, de unde $NP \equiv MQ$. Deoarece $MN \equiv PQ$ (din enunț), $MP \equiv PM$ și $NP \equiv MQ$, rezultă că $\Delta MNP \equiv \Delta PQM$ (criteriul de congruență LLL). Din congruența celor două triunghiuri rezultă $NP \equiv MQ$. Deoarece $MN \equiv PQ$ și $NP \equiv MQ$, rezultă că patrulaterul $MNPQ$ are laturile opuse congruente și, ca urmare, este paralelogram. Fiind paralelogram, are laturile opuse paralele, adică $MQ \parallel NP$. Rezultă că dreptele $MQ$ și $NP$ sunt paralele.

## Portofoliu

Se dă o dreaptă $a$ și un punct $P$, care nu aparține dreptei. Folosind doar o riglă negradată și compasul, construiește prin punctul $P$ paralela $b$ la dreapta $a$. Precizează etapele construcției.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** **a)** Scrie definiția paralelogramului.
**b)** Desenează un paralelogram *MNPQ*.

**2** Un unghi al unui paralelogram are măsura de 40°. Calculează măsurile celorlalte trei unghiuri.

**3** Patrulaterul *ABCD* este un paralelogram pentru care $\sphericalangle B = 4x° + 15°$ și $\sphericalangle D = 6x° - 27°$. Calculează măsurile celor patru unghiuri ale paralelogramului.

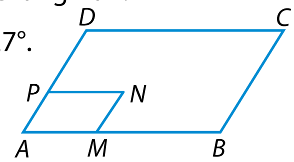


*Fig. 14*

**4** În figura 14, *ABCD* și *AMNP* sunt paralelograme. Care este relația dintre $\sphericalangle D$ și $\sphericalangle N$? Dar dintre $\sphericalangle N$ și $\sphericalangle C$? Justifică răspunsurile.

**5** În figura 15, punctul *O* este mijlocul segmentelor *AM* și *NP*. Demonstrează că $MN \parallel AB$ și $MP \parallel AC$.

**6** Fie *ABCD* un paralelogram. Din vârfurile *B* și *D* se construiesc perpendicularele pe diagonala *AC*. Se notează cu *M* și *N* picioarele acestora. Demonstrează că patrulaterul *BMDN* este paralelogram.

**7** În figura 16, *ABCD* este un paralelogram, iar *M*, *N*, *P*, *Q* sunt mijloacele segmentelor *OA*, *OB*, *OC*, *OD*. Demonstrează că *MNPQ* este paralelogram.

**8** Dacă *ABCD* este un paralelogram și $AM \equiv CN$ (figura 17), demonstrează că patrulaterul *BNDM* este paralelogram.

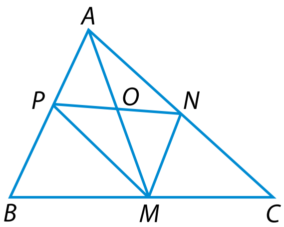


*Fig. 15*

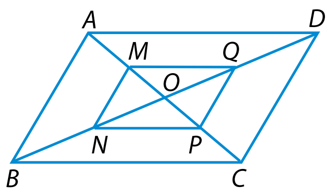


*Fig. 16*

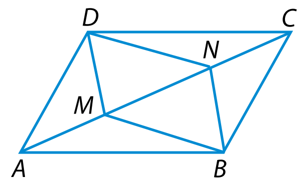


*Fig. 17*

**9** Patrulaterul *ABCD* este paralelogram. Prin vârfurile *A*, respectiv *C* se construiesc două drepte paralele care intersectează dreapta *BD* în punctele *M*, respectiv *N*. Demonstrează că:
**a)** $DM \equiv BN$; **b)** *AMCN* este un paralelogram.

**10** *Fie MNPQ* un paralelogram, punctul *O* – mijlocul laturii *MP* și *R* – un punct oarecare pe segmentul *MN*. Dacă punctul *S* este simetricul punctului *R* față de punctul *O*, demonstrează că *MRPS* este paralelogram.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **4,5 puncte**
Un patrulater *ABCD* este paralelogram dacă:
**a)** laturile *AD* și *BC* sunt congruente; **A** **F**
**b)** laturile *AD* și *BC* sunt paralele; **A** **F**
**c)** diagonalele patrulaterului au același mijloc. **A** **F**

**2** **Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.** **2 puncte**
Un patrulater *ABCD* este un paralelogram dacă:
**A.** nicio pereche de unghiuri alăturate ale patrulaterului nu sunt unghiuri suplementare;
**B.** o singură pereche de unghiuri alăturate ale patrulaterului sunt unghiuri suplementare;
**C.** exact două perechi de unghiuri alăturate ale patrulaterului sunt unghiuri suplementare;
**D.** trei dintre perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului sunt unghiuri suplementare.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2,5 puncte**
Dacă *ABCD* este paralelogram, cu $BC = 2AB$ și $\sphericalangle B = 2\sphericalangle A$, atunci valoarea raportului $\frac{\sphericalangle CBD}{\sphericalangle CDB}$ este egală cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 3 Aplicații în geometria triunghiului: linia mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi

## Ne amintim

- definiția paralelogramului și proprietățile paralelogramului;
- cum demonstrăm că un patrulater este paralelogram;
- definiția medianei unui triunghi și proprietățile medianelor unui triunghi.

## Rezolvăm împreună

### PROBLEMA 1

Mijlocul laturii *AB* a unui triunghi *ABC* se notează cu *M*, iar mijlocul laturii *AC* se notează cu *N*. Demonstrează că dreptele *MN* și *BC* sunt paralele, iar lungimea segmentului *MN* este egală cu jumătate din lungimea segmentului *BC*.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Desenăm punctul *P* pe dreapta *MN*, astfel încât $MN \equiv NP$ (figura 1). Deci, $MN = \frac{1}{2}MP$.

Deoarece $AN \equiv NC$ (din ipoteză), $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle CNP$ (ca unghiuri opuse la vârf) și $MN \equiv PN$ (din construcție), conform criteriului LUL rezultă că $\Delta ANM \equiv \Delta CNP$. Din congruența triunghiurilor rezultă că $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle PCN$ și $AM \equiv CP$. Deoarece unghiurile *MAN* și *PCN* sunt unghiuri alterne interne congruente, determinate de dreptele *AB* și *CP* cu secanta *AC*, rezultă că dreptele *AB* și *CP* sunt paralele (criteriu de paralelism), adică $AB \parallel CP$ și $MB \parallel CP$. Cum $AM \equiv MB$ (din ipoteză) și $AM \equiv CP$, rezultă că $MB \equiv CP$. Din $MB \parallel CP$ și $MB \equiv CP$ rezultă că patrulaterul *MBCP* este paralelogram și $BC \equiv MP$, iar din $MN = \frac{1}{2}MP$ rezultă că $MN = \frac{1}{2}BC$.

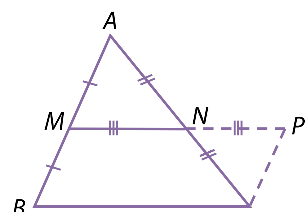


Fig. 1

### PROBLEMA 2

Mijlocul laturii *AB* a unui triunghi *ABC* se notează cu *M*. Paralela prin *M* la dreapta *BC* intersectează dreapta *AC* în punctul *N*. Demonstrează că punctul *N* este mijlocul laturii *AC* și că lungimea segmentului *MN* este egală cu jumătate din lungimea segmentului *BC*.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Folosim *metoda reducerii la absurd*. Presupunem că punctul *N* nu este mijlocul laturii *AC* (figura 2). În această situație, un alt punct *P* este mijlocul segmentului *AC*. Deoarece $AM \equiv MB$ și $AP \equiv PC$, conform problemei anterioare, rezultă $MP \parallel BC$. Aceasta înseamnă că prin punctul *M* trec două paralele distincte la dreapta *BC*, ceea ce este absurd, deoarece contrazice axioma lui Euclid. Prin urmare, presupunerea că punctul *N* nu este mijlocul laturii *AC* este falsă. Rezultă că *N* este mijlocul segmentului *AC* și, conform demonstrației anterioare, $MN = \frac{1}{2}BC$. Așadar, $AN \equiv NC$ și $MN = \frac{1}{2}BC$.

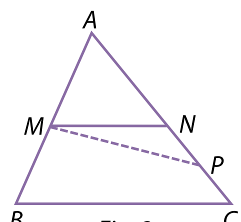


Fig. 2

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Pentru că segmentul *MN* este determinat din mijloacele a două laturi ale triunghiului *ABC*, acesta este numit *linie mijlocie*. Cele două probleme descriu afirmații importante referitoare la linia mijlocie, care au fost justificate printr-o succesiune de judecăți bazate pe cunoștințele anterioare.

Prin urmare, aceste afirmații sunt teoreme: *teorema liniei mijlocii* și *reciproca teoremei liniei mijlocii.*

## Reține!

- **Definiția liniei mijlocii**
  **Linia mijlocie** a unui triunghi este segmentul determinat de mijloacele a două dintre laturile triunghiului. Orice triunghi are trei linii mijlocii.
- **Teorema liniei mijlocii**
  Linia mijlocie determinată de mijloacele a două laturi ale unui triunghi este paralelă cu cea de-a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea acesteia.
- **Reciproca teoremei liniei mijlocii**
  Paralela la o latură a unui triunghi dusă prin mijlocul altei laturi este linie mijlocie a triunghiului.

## Aplicăm cunoștințele

Demonstrează că *medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct, notat cu G, numit* ***centrul de greutate al triunghiului****, situat pe fiecare mediană la două treimi de vârf și o treime de bază.*

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Dacă *AD, BE* și *CF* sunt *mediane ale triunghiului ABC*, rezultă că *D*, *E*, respectiv *F* sunt mijloacele laturilor *BC*, *AC*, respectiv *AB* (figura 3). Notăm cu *G* intersecția medianelor *AD* și *BE*. Cu *G′* notăm intersecția medianelor *AD* și *CF*, iar cu *M* și *N* notăm mijloacele laturilor *AG*, respectiv *BG* ale triunghiului *ABG*.

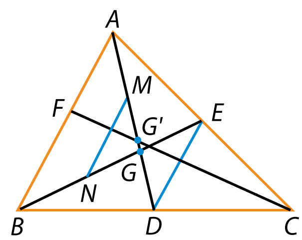


*Fig. 3*

Demonstrăm următoarele afirmații:

(1) $MN \parallel AB$ și $MN=\frac{1}{2}AB$; (2) $DE \parallel AB$ și $DE=\frac{1}{2}AB$;

(3) $DG=\frac{1}{3}AD$ și $AG=\frac{2}{3}AD$; (4) $DG'=\frac{1}{3}AD$ și $AG'=\frac{2}{3}AD$.

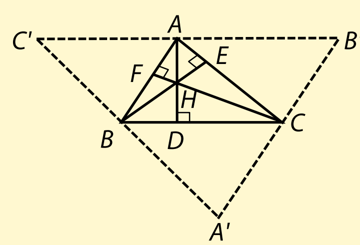
Deoarece $GM \equiv MA$ și $GN \equiv NB$, rezultă că *MN* este linie mijlocie a triunghiului *ABG*. Din teorema liniei mijlocii rezultă că $MN \parallel AB$ și $MN=\frac{1}{2}AB$, adică (1). Din faptul că *DE* este linie mijlocie a triunghiului *ABC* și din teorema liniei mijlocii, rezultă că $DE \parallel AB$ și $DE=\frac{1}{2}AB$, adică (2). Din (1) și (2) rezultă că $MN \parallel DE$ și $MN=DE=\frac{1}{2}AB$. Rezultă că patrulaterul *DEMN* este paralelogram (are două laturi opuse paralele și congruente). Prin urmare, diagonalele patrulaterului au același mijloc, adică $GD \equiv GM$. Cum $GM \equiv MA$, rezultă că $DG = GM = MA = \frac{1}{3}AD$, iar din $AG = AD - GD$ rezultă că $AG = \frac{2}{3}AD$. Prin urmare, $DG=\frac{1}{3}AD$ și $AG=\frac{2}{3}AD$, adică (3). Analog, se demonstrează că $DG'=\frac{1}{3}AD$ și $AG'=\frac{2}{3}AD$, adică (4). Deoarece *G* și *G′* sunt puncte ale segmentului *AD* și $DG = DG' = \frac{1}{3}AD$, rezultă că punctele *G* și *G′* coincid. Prin urmare, *medianele sunt concurente în punctul G, care se află pe mediana AD la o treime de bază și două treimi de vârf. Analog, se arată că punctul G se află pe fiecare mediană la o treime de bază și două treimi de vârf.*

## Portofoliu

Se consideră un triunghi *ABC* și punctele *A'*, *B'*, *C'*, astfel încât *ABCB'*, *ACBC'* și *BACA'* să fie paralelograme, ca în figura alăturată. Se spune că triunghiul *A'B'C'* este *complementul triunghiului ABC*.

**a)** Demonstrează că dreptele *AA′*, *BB′* și *CC′* sunt concurente.

**b)** Demonstrează că înălțimile *AD*, *BE* și *CF* ale triunghiului *ABC* sunt concurente.



## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Se notează cu *M*, *N*, *P* mijloacele laturilor *AB*, *BC*, respectiv *CA* ale triunghiului *ABC*. Demonstrează că perimetrul triunghiului *MNP* este jumătate din perimetrul triunghiului *ABC*.

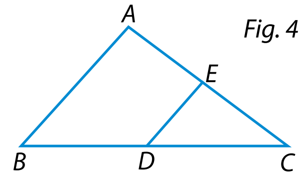


*Fig. 4*

**2** Punctele *D* și *E* sunt mijloacele laturilor *BC* și *AC* ale unui triunghi *ABC* (figura 4). Știind că $\sphericalangle B = 34°$, $\sphericalangle C = 46°$ și $DE = 4$ cm, calculează:

**a)** lungimea segmentului *AB*; **b)** măsura unghiului *DEC*.

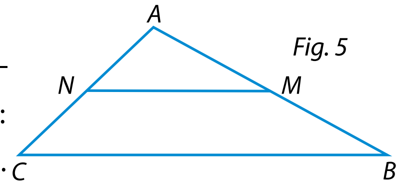


*Fig. 5*

**3** Unghiul *A* al unui triunghi *ABC* este obtuz și punctul *M* este mijlocul laturii *AB*. Punctul *N* este pe segmentul *AC* și $MN = \frac{1}{2}BC$ (figura 5). Demonstrează că:

**a)** punctul *N* este mijlocul laturii *AC*; **b)** dreptele *MN* și *BC* sunt paralele.

**4** Punctele *E* și *F* sunt mijloacele laturilor *AB* și *AC* ale unui triunghi *ABC*. Se notează cu *P* mijlocul liniei mijlocii *EF* și cu *D*, intersecția dreptelor *BC* și *AP*. Demonstrează că segmentul *AD* este mediană a triunghiului *ABC*.

**5** Într-un triunghi *ABC*, notăm cu *M* și *N* mijloacele laturilor *AB*, respectiv *AC*. Demonstrează că punctul de intersecție a segmentului *MN* cu mediana *AP* este mijlocul segmentelor *MN*, respectiv *AP*.

**6** Fie punctele *D* și *E* pe latura *AB*, respectiv *F* și *G* pe latura *AC* a triunghiului *ABC*, astfel încât *FD* este linie mijlocie a triunghiului *AEG* și *GE* este linie mijlocie a triunghiului *ABC*. Prin punctul *F* se construiește paralela la dreapta *AB*, care intersectează latura *BC* în punctul *H* (figura 6). Demonstrează că $FH = \frac{3}{4}AB$.

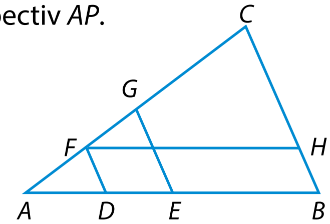


*Fig. 6*

**7** Un triunghi *ABC* are perimetrul egal cu 6 cm, $AB = 1{,}6$ cm și $BC = 2{,}4$ cm. Paralelele prin vârfurile triunghiului la laturile acestuia se intersectează două câte două în punctele *A′*, *B′* și *C′* (figura 7). Calculează perimetrul triunghiului *A′B′C′*.

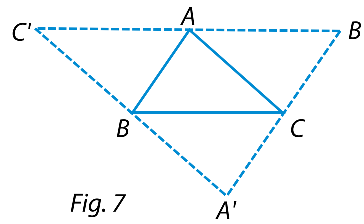


*Fig. 7*

**8** În triunghiul *ABC*, notăm cu *M* și *N* mijloacele laturilor *AB*, respectiv *AC*, iar *P* este un punct oarecare pe latura *BC*. Dacă $AP \cap MN = \{O\}$, demonstrează că punctul *O* este mijlocul segmentului *AP*.

**9** În paralelogramul *ABCD*, notăm cu *M* și *N* mijloacele laturilor *BC*, respectiv *CD*. Dacă diagonala *BD* intersectează segmentele *AM* și *AN* în punctele *P*, respectiv *Q*, demonstrează că patrulaterul *APCQ* este paralelogram.

**10** În paralelogramul *ABCD*, notăm cu *M* și *N* mijloacele laturilor *AB*, respectiv *CD* și cu *O* notăm punctul de intersecție a diagonalelor. Dacă diagonala *AC* intersectează segmentele *DM* și *BN* în punctele *E*, respectiv *F*, demonstrează că: **a)** punctele *M*, *O* și *N* sunt coliniare; **b)** segmentele *AE*, *CF* și *EF* sunt congruente.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **4,5 puncte**

Dacă se notează cu *E* și *F* mijloacele laturilor *BC*, respectiv *AC* ale unui triunghi *ABC*, atunci:

**a)** semidreapta *AE* este o bisectoare a triunghiului *ABC*; **A** **F**

**b)** segmentul *BF* este o mediană a triunghiului *ABC*; **A** **F**

**c)** segmentul *EF* este o linie mijlocie a triunghiului *ABC*. **A** **F**

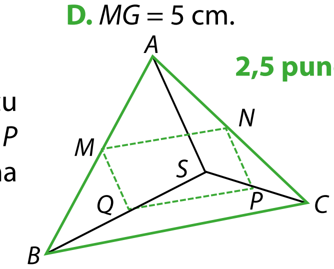
**2** **Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.** **2 puncte**

Punctul *M* este mijlocul laturii *BC* a triunghiului *ABC* și $AM = 12$ cm. Un punct *G* al segmentului *AM* este centrul de greutate al triunghiului *ABC* dacă:

**A.** $AG = 4$ cm; **B.** $MG = 8$ cm; **C.** $AG = 8$ cm; **D.** $MG = 5$ cm.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2,5 puncte**

Se consideră un punct *S* în interiorul triunghiului *ABC* și se notează cu *M* și *N* mijloacele laturilor *AB*, respectiv *AC*, ca în figura alăturată. Dacă *Q* și *P* sunt mijloacele laturilor *SB*, respectiv *SC*, $BC = 5$ cm și $AS = 2$ cm, atunci suma lungimilor laturilor patrulaterului *MNPQ* este egală cu ☐ cm.



# LECȚIA 4 Dreptunghiul. Definiție și proprietăți

## Ne amintim

- definiția și proprietățile paralelogramului;
- cum demonstrăm că un patrulater este paralelogram;
- definiția medianei unui triunghi și proprietățile medianelor unui triunghi.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

În multe obiecte din jurul nostru se regăsesc forme geometrice. Mai jos puteți admira o frumoasă fereastră românească din *perioada interbelică*, în care recunoașteți cu siguranță forma geometrică denumită dreptunghi.

**Știai că...**

*Perioada interbelică* desemnează intervalul de 21 de ani dintre cele două Războaie Mondiale (1918-1939). Aceasta a fost:
– o perioadă zbuciumată în care, în ciuda păcii aparente, conflictele erau în stare latentă;
– perioada în care s-au concretizat cele trei ideologii care au schimbat fața lumii: fascismul, nazismul și comunismul;
– una dintre cele mai frumoase perioade ale Bucureștiului.
Multe dintre planurile și clădirile realizate în acea perioadă există și astăzi.

**Ce este dreptunghiul?**

**Dreptunghiul** este paralelogramul care are un unghi drept.

**Teoreme:**

**1.** Toate unghiurile unui dreptunghi sunt drepte.
**2.** Diagonalele unui dreptunghi sunt congruente.
**3.** Dacă un paralelogram are diagonalele congruente, atunci paralelogramul este dreptunghi.

**Reformulăm teoremele:**

- **Teorema 1** (figura 1):
  **Ipoteza:** *ABCD* este dreptunghi.
  **Concluzia:** $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$.
- **Teorema 2** (figura 2):
  **Ipoteza:** *ABCD* este dreptunghi.
  **Concluzia:** $AC \equiv BD$.
- **Teorema 3** (figura 2):
  **Ipoteza:** *ABCD* este paralelogram și $AC \equiv BD$.
  **Concluzia:** *ABCD* este dreptunghi.

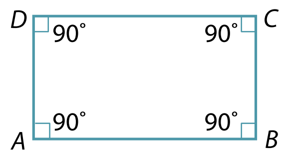


*Fig. 1*

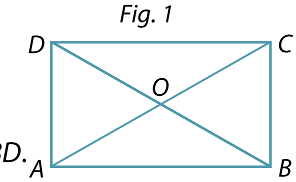


*Fig. 2*

## Rezolvăm împreună

### Teorema 1

Conform ipotezei, *ABCD* este dreptunghi. Din definiția dreptunghiului rezultă că *ABCD* este paralelogram și are un unghi drept, de exemplu $\sphericalangle A = 90°$. Dar *unghiurile opuse ale unui paralelogram sunt congruente, iar unghiurile alăturate sunt suplementare*. Prin urmare: $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = \sphericalangle A$, $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$, $\sphericalangle D = \sphericalangle B$. Din aceste relații rezultă concluzia teoremei:
$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = 90°$.

### Teorema 2

Conform ipotezei, *ABCD* este dreptunghi. Din definiția dreptunghiului rezultă că *ABCD* este paralelogram. Dar *laturile opuse ale unui paralelogram sunt congruente*. Conform teoremei 1, *dreptunghiul are toate unghiurile drepte*. Prin urmare: $AB \equiv DC$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB = 90°$, $BC \equiv CB$. Din aceste relații rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$ (criteriul CC). Din congruența triunghiurilor dreptunghice *ABC* și *DCB* rezultă că $AC \equiv BD$.

### Teorema 3

Notăm cu *O* punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului *ABCD*. Deoarece *diagonalele au același mijloc* și $AC \equiv BD$, rezultă că $OA = OC = OB = OD$. Prin urmare, triunghiurile *AOB* și *BOC* sunt isoscele. Unghiurile alăturate bazei unui triunghi isoscel sunt congruente. Notăm cu α măsura unghiurilor alăturate bazei *AB*

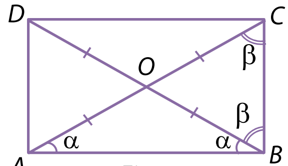


Fig. 3

a triunghiului isoscel $AOB$ și notăm cu $\beta$ măsura unghiurilor alăturate bazei $BC$ a triunghiului isoscel $BOC$ (figura 3). Din suma măsurilor unghiurilor în triunghiul $ABC$ rezultă: $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180°$, de unde $\alpha + \beta = 90°$ sau $\sphericalangle ABC = 90°$. Având un unghi drept, paralelogramul $ABCD$ este dreptunghi (definiția dreptunghiului).

**Observăm următoarele:**

- Teorema 2 poate fi formulată și astfel:
  *Dacă un paralelogram este dreptunghi, atunci diagonalele lui sunt congruente.*
- Reciproca acestei teoreme este teorema 3:
  *Dacă un paralelogram are diagonalele congruente, atunci paralelogramul este dreptunghi.*
- Cele două teoreme au ca *ipoteză comună* faptul că *patrulaterul ABCD este paralelogram*:
  – dacă la *ipoteza comună* adăugăm *ipoteza* $ABCD$ – dreptunghi, obținem *concluzia* $AC \equiv BD$, adică teorema 2;
  – dacă la *ipoteza comună* adăugăm *ipoteza* $AC \equiv BD$, atunci *concluzia* este $ABCD$ – dreptunghi, adică teorema 3.

De aceea despre condițiile $ABCD$ – dreptunghi și $AC \equiv BD$ se spune că sunt echivalente în ipoteza comună $ABCD$ – paralelogram (una dintre condiții o implică pe cealaltă și reciproc).

Notăm: Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $ABCD$ – dreptunghi $\Leftrightarrow AC \equiv BD$.

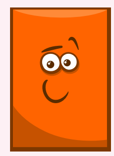
Așadar, putem să enunțăm și să reformulăm teorema 2 și teorema 3 sub forma unei singure teoreme astfel:

Un paralelogram este dreptunghi dacă și numai dacă diagonalele sale sunt congruente.

SAU: O condiție necesară și suficientă ca un paralelogram să fie dreptunghi este ca diagonalele sale să fie congruente.

## Reține!

- **Definiția dreptunghiului**
  **Dreptunghiul** este paralelogramul care are un unghi drept.
- Deoarece este un paralelogram, **dreptunghiul are toate proprietățile paralelogramului**.
- **Proprietăți specifice dreptunghiului** (pe care nu le are paralelogramul)**:**
  - unghiurile unui dreptunghi sunt drepte;
  - diagonalele unui dreptunghi sunt congruente.
- **Pentru a demonstra că un paralelogram este dreptunghi, este suficient să arătăm că este îndeplinită una dintre următoarele condiții:**
  - paralelogramul are un unghi drept;
  - paralelogramul are diagonalele congruente.



## Aplicăm cunoștințele

În clasa a VI-a au fost enunțate și demonstrate *teorema medianei* și *reciproca teoremei medianei*. Acum, vom demonstra aceste teoreme utilizând cunoștințe despre paralelogram și dreptunghi.

**Teorema medianei:** Lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):* Pe semidreapta $AM$ luăm punctul $D$, astfel încât $MD \equiv MA$ și $AM = \frac{1}{2}AD$. Din $AM$ – mediană în triunghiul $ABC$ rezultă că $MB \equiv MC$. Deoarece $MD \equiv MA$ și $MB \equiv MC$, rezultă că $M$ este mijlocul diagonalelor patrulaterului $ACDB$ și, ca urmare, $ACDB$ este paralelogram. Cum $\sphericalangle BAC = 90°$, rezultă că $ACDB$ este dreptunghi și $AD = BC$. Din $AM = \frac{1}{2}AD$ și $AD = BC$ rezultă că $AM = \frac{1}{2}BC$ (figura 4).

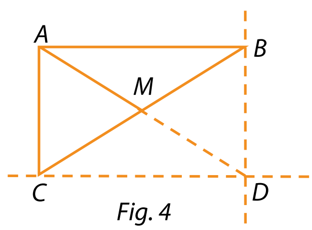


Fig. 4

**Reciproca teoremei medianei:** Dacă lungimea medianei corespunzătoare laturii unui triunghi este jumătate din lungimea acelei laturi, atunci triunghiul este dreptunghic, iar latura respectivă este ipotenuza triunghiului dreptunghic.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):* Construim dreptele $BD$ și $CD$, astfel încât $CD \parallel AB$ și $BD \parallel AC$ (figura 5). Rezultă că $ACDB$ – paralelogram *(patrulaterul cu laturile opuse paralele este paralelogram)*.

Notăm cu $N$ punctul de intersecție a diagonalelor. Cum $N$ este mijlocul fiecărei diagonale, rezultă că $N$ este mijlocul diagonalei $BC$. Deoarece $AM$ este mediana corespunzătoare laturii $BC$, rezultă că $M$ este mijlocul diagonalei $BC$. Cum mijlocul unui segment este unic, rezultă că punctele $M$ și $N$ coincid. Prin urmare, $M$ este mijlocul diagonalelor $AD$ și $BC$.

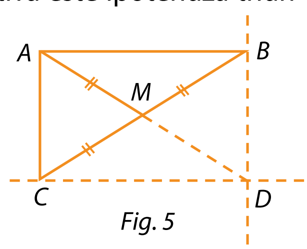


Fig. 5

În consecință, $AM = \frac{1}{2}AD$ și, cum $AM = \frac{1}{2}BC$, rezultă $AD \equiv BC$. Prin urmare, paralelogramul $ABDC$ este dreptunghi și $\sphericalangle BAC = 90°$, deci triunghiul $ABC$ este dreptunghic cu ipotenuza $BC$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Desenează un dreptunghi $ABCD$ și notează cu $O$ punctul de intersecție a diagonalelor. Completează spațiile punctate cu răspunsul corect:

**a)** Dacă $AB = 5$ cm și $BC = 3$ cm, atunci $CD = \dots$ și $AD = \dots$ .

**b)** Dacă $AC = 10$ cm, atunci $CO = \dots$ și $DO = \dots$ . **c)** Dacă $BO = 8$ cm, atunci $BD = \dots$ și $AC = \dots$ .

**d)** Dacă $\sphericalangle AOB = 110°$, atunci $\sphericalangle ACD = \dots$ și $\sphericalangle ADB = \dots$ . **e)** Dacă $\sphericalangle BOC = 60°$, atunci $\sphericalangle BAO = \dots$ și $\sphericalangle ACB = \dots$ .

**2** Un paralelogram $ABCD$, ale cărui diagonale se intersectează în punctul $O$, are măsura unghiului $BDC$ egală cu 35° și măsura unghiului $BOA$ este egală cu 110°.

**a)** Calculează măsurile unghiurilor $ABO$, $AOD$ și $BAC$. **b)** Demonstrează că patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi.

**3** Pe un cerc cu centrul într-un punct $O$ se consideră punctele $A$, $B$, $C$, $D$ astfel încât punctele $A$ și $C$, respectiv $B$ și $D$ să fie puncte diametral opuse. Demonstrează că patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi.

**4** Punctele $M$, $N$, $P$ și $Q$ sunt mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$, $AB \equiv AD$ și $BC \equiv DC$ (figura 6). Demonstrează că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

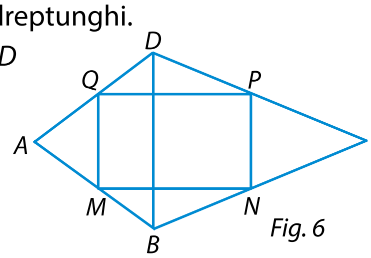


*Fig. 6*

**5** Se consideră un triunghi $ABC$ și se notează cu $D$ simetricul punctului $A$ față de mijlocul laturii $CB$.

**a)** Construiește figura geometrică.

**b)** Dacă $AD \equiv BC$, demonstrează că patrulaterul $ABDC$ este dreptunghi.

**6** Se consideră un paralelogram $ABCD$. Știind că $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ABD$, demonstrează că $ABCD$ este dreptunghi.

**7** Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele perpendiculare. Dacă punctele $E$, $F$, $G$ și $H$ sunt mijloacele laturilor $AB$, $BC$, $CD$, respectiv $DA$, demonstrează că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi.

**8** Diagonalele unui paralelogram $ABCD$ se intersectează în punctul $O$. Știind că triunghiul $AOB$ este echilateral, calculează măsura unghiului $ABC$.

**9** Se consideră un dreptunghi $ABCD$. Pe diagonala $AC$ se ia un punct $E$, astfel încât $CE \equiv BC$, și se notează cu $F$ intersecția dreptelor $BE$ și $AD$. Dacă punctul $G$ este simetricul punctului $F$ față de punctul $A$ și $GE \cap AB = \{H\}$, demonstrează că $FH$ este înălțime în triunghiul $BFG$.

**10** Triunghiul $ABC$ are unghiul $A$ obtuz. Înălțimea din vârful $A$ intersectează latura $BC$ în punctul $P$. Paralela prin $A$ la dreapta $BC$ și perpendiculara în $B$ pe $BC$ se intersectează în $Q$. Paralela prin $A$ la dreapta $BC$ și perpendiculara în $C$ pe $BC$ se intersectează în $R$. Demonstrează că $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **4,5 puncte**

**a)** Paralelogramul cu două unghiuri alăturate congruente este dreptunghi. **A** **F**

**b)** Patrulaterul cu două unghiuri opuse congruente este dreptunghi. **A** **F**

**c)** Paralelogramul cu două unghiuri opuse suplementare este dreptunghi. **A** **F**

**2** **Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.** **2 puncte**

Dacă o paralelă la latura $BC$ a triunghiului $ABC$ intersectează laturile $AB$ și $AC$ în punctele $M$ și $N$, $MN = \frac{1}{2}BC$, atunci:

**A.** $MN$ nu este linie mijlocie, pentru că $M$ și $N$ nu sunt mijloacele laturilor $AB$ și $AC$;

**B.** $M$ este mijlocul laturii $AB$ și $N$ nu este mijlocul laturii $AC$;

**C.** $N$ este mijlocul laturii $AC$ și $M$ nu este mijlocul laturii $AB$;

**D.** $MN$ este linie mijlocie a triunghiului $ABC$.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2,5 puncte**

Lungimea laturii $BC$ a dreptunghiului $ABCD$ este jumătate din lungimea diagonalei $AC$. Dacă $O$ este punctul de intersecție a diagonalelor dreptunghiului, atunci măsura unghiului $BOC$ este egală cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 5 Rombul. Definiție și proprietăți

## Ne amintim

- definiția și proprietățile paralelogramului;
- definiția mediatoarei unui segment și proprietatea punctelor de pe mediatoare.

## Rezolvăm împreună

Folosind compasul, construim trei cercuri cu razele de aceeași lungime în felul următor:
- cu centrul într-un punct *A*, desenăm un cerc $\mathcal{C}_1$ cu raza *r*, pe care luăm două puncte *B* și *D*;
- cu centrul în punctul *B*, desenăm un cerc $\mathcal{C}_2$ cu raza *r*;
- cu centrul în punctul *D*, desenăm un cerc $\mathcal{C}_3$ cu raza *r*;
- notăm cu *C*, $C \neq A$, punctul în care cercurile $\mathcal{C}_2$ și $\mathcal{C}_3$ se intersectează.

Folosind rigla, construim patrulaterul *ABCD* și diagonalele acestuia (figura 1).

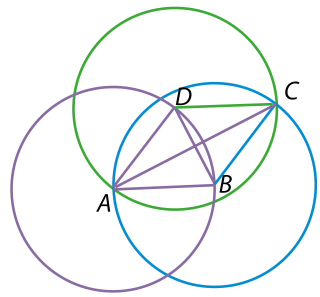


*Fig. 1*

Demonstrează că:

**a)** laturile patrulaterului sunt congruente;
**b)** diagonalele patrulaterului sunt perpendiculare;
**c)** patrulaterul este paralelogram;
**d)** diagonalele patrulaterului sunt bisectoarele unghiurilor.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

**a)** Observăm că *AB* și *AD* sunt raze ale cercului $\mathcal{C}_1$, *CB* este rază a cercului $\mathcal{C}_2$ și *CD* este rază a cercului $\mathcal{C}_3$, iar $AB = BC = CD = DA = r$. Rezultă că laturile patrulaterului *ABCD* sunt congruente.

**b)** Deoarece $BA = BC$, punctul *B* este egal depărtat de capetele segmentului *AC*. Rezultă că punctul *B* este pe mediatoarea segmentului *AC* (*un punct este pe mediatoarea unui segment dacă și numai dacă punctul este egal depărtat de capetele segmentului*). Analog, deoarece $DA = DC$, punctul *D* este pe mediatoarea segmentului *AC*. Prin urmare, dreapta *BD* este mediatoarea segmentului *AC*. Rezultă că $BD \perp AC$ (*mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acestuia*). Așadar, diagonalele patrulaterului *ABCD* sunt perpendiculare.

**c)** Dacă notăm cu *O* punctul de intersecție a diagonalelor, conform punctului precedent rezultă că *O* este mijlocul diagonalei *AC*. Analog, arătăm că *AC* este mediatoarea segmentului *BD* și că *O* este mijlocul segmentului *BD*. Cum diagonalele patrulaterului *ABCD* au același mijloc, rezultă că patrulaterul *ABCD* este paralelogram.

**d)** Din $\Delta ABD \equiv \Delta CBD$ (LLL) rezultă că *BD* este bisectoarea unghiului *ABC* și că *DB* este bisectoarea unghiului *ADC*. Din $\Delta ADC \equiv \Delta ABC$ (LLL) rezultă că *AC* este bisectoarea unghiului *BAD* și că *CA* este bisectoarea unghiului *BCD*. Deci, diagonalele patrulaterului sunt bisectoarele unghiurilor.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Problema precedentă arată că există paralelograme cu toate laturile congruente și că aceste paralelograme au diagonalele perpendiculare. Un astfel de paralelogram se numește romb. Prin urmare, patrulaterul *ABCD* din figura 1 este romb. Alăturat puteți admira un covor, în care recunoașteți rombul.

**Ce este rombul?**

**Rombul** este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente (figura 2).

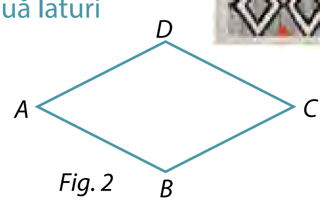
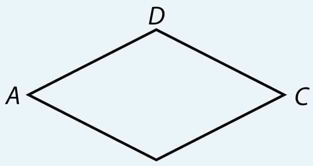
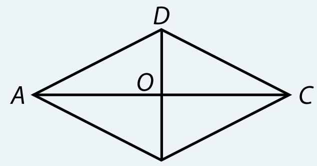
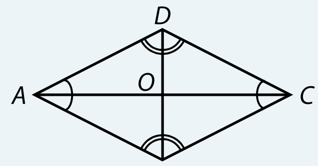
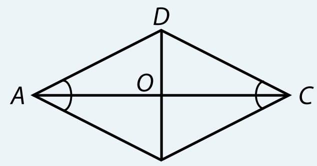


*Fig. 2*

**Teoreme:**

**1.** Laturile rombului sunt congruente.
**2.** Diagonalele rombului sunt perpendiculare.
**3.** Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, atunci paralelogramul este romb.
**4.** Diagonalele rombului sunt bisectoarele unghiurilor acestuia.
**5.** Dacă o diagonală a unui paralelogram este bisectoarea unuia dintre unghiurile acestuia, atunci paralelogramul este romb.

| | | |
|---|---|---|
| **Teorema 1** (figura 3)<br>**Ipoteza:** *ABCD* – romb.<br>**Concluzia:** $AB \equiv BC \equiv CD \equiv AD$. | **Teorema 2** (figura 4)<br>**Ipoteza:** *ABCD* – romb.<br>**Concluzia:** $AC \perp BD$. | **Teorema 3** (figura 4)<br>**Ipoteza:** *ABCD* – paralelogram;<br>$AC \perp BD$.<br>**Concluzia:** *ABCD* – romb. |
| <br>Fig. 3 | <br>Fig. 4 | <br>Fig. 5 |
| **Teorema 4** (figura 5)<br>**Ipoteza:** *ABCD* – romb.<br>**Concluzia:**<br>$\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle BCA$;<br>$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$, $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle CDB$. | <br>Fig. 6 | **Teorema 5** (figura 6)<br>**Ipoteza:** *ABCD* – paralelogram;<br>$\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BAC$.<br>**Concluzia:** *ABCD* – romb. |

- Teorema 2 poate fi formulată și astfel:
  *Dacă un paralelogram este romb, atunci diagonalele lui sunt perpendiculare.*
- *Reciproca* acestei teoreme este teorema 3:
  *Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, atunci paralelogramul este romb.*
- Teorema 2 și teorema 3 se pot enunța sub forma:
  Un paralelogram este romb dacă și numai dacă diagonalele lui sunt perpendiculare.

SAU: O condiție necesară și suficientă ca un paralelogram să fie romb este ca diagonalele lui să fie perpendiculare.

Reformulare: **Dacă *ABCD* este paralelogram, atunci *ABCD* este romb $\Leftrightarrow AC \perp BD$.**

- Teoremele 4 și 5 se pot enunța sub forma:
  Un paralelogram este romb dacă și numai dacă o diagonală a paralelogramului este bisectoarea unuia dintre unghiurile acestuia.

SAU: O condiție necesară și suficientă ca un paralelogram să fie romb este ca o diagonală a paralelogramului să fie bisectoarea unuia dintre unghiurile acestuia.

Reformulare: **Dacă *ABCD* este paralelogram, atunci *ABCD* este romb $\Leftrightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$.**

## Reține!

- **Definiția rombului**
  **Rombul** este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.
- Deoarece este un paralelogram, **rombul are toate proprietățile paralelogramului**.
- **Proprietăți specifice rombului** (pe care nu le are paralelogramul)**:**
  - toate laturile rombului sunt congruente;
  - diagonalele rombului sunt perpendiculare;
  - diagonalele rombului sunt bisectoarele unghiurilor acestuia.
- **Pentru a demonstra că un patrulater este romb, este suficient să arătăm că are toate laturile congruente.**
- **Pentru a demonstra că un paralelogram este romb, este suficient să arătăm că este îndeplinită una dintre următoarele condiții:**
  - două laturi consecutive sunt congruente;
  - diagonalele sunt perpendiculare;
  - o diagonală este bisectoarea unuia dintre unghiuri.

## Aplicăm cunoștințele

Pe un cerc $\mathscr{C}_1$ cu centrul în punctul *O* și raza *r*, se alege un punct *Q* și se construiește cercul $\mathscr{C}_2$ cu centrul în *Q* și raza *r*. Se notează cu *A* și *B* punctele de intersecție a celor două cercuri. Demonstrează că:

**a)** $\sphericalangle OAQ = 60°$; **b)** $AB \perp OQ$; **c)** $\sphericalangle AOB = 120°$.

**Ipoteza:** $\mathcal{C}_1(O, r) \cap \mathcal{C}_2(Q, r) = \{A, B\}$.
**Concluzia: a)** $\sphericalangle OAQ = 60°$; **b)** $AB \perp OQ$; **c)** $\sphericalangle AOB = 120°$.

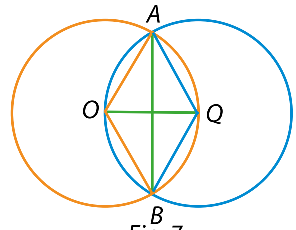


*Fig. 7*

***Demonstrație*** *(activitate individuală):* Construim figura conform enunțului (figura 7).
**a)** Observăm că segmentele $OA$ și $OQ$ sunt raze ale cercului $\mathcal{C}_1$ ($OA = OQ = r$), iar segmentele $QA$ și $QO$ sunt raze ale cercului $\mathcal{C}_2$ ($QA = OQ = r$).
Prin urmare, triunghiul $AOQ$ este echilateral și $\sphericalangle OAQ = 60°$.
**b)** Observăm că laturile patrulaterului $AOBQ$ sunt congruente, deoarece sunt raze ale celor două cercuri. Rezultă că patrulaterul $AOBQ$ este romb (*patrulaterul cu laturile congruente este romb*). Prin urmare, $AB \perp OQ$ (*diagonalele unui romb sunt perpendiculare*).
**c)** Rombul este un paralelogram. Deoarece suma măsurilor a două unghiuri alăturate ale unui paralelogram este egală cu 180°, rezultă că $\sphericalangle OAQ + \sphericalangle AOB = 180°$. Cum $\sphericalangle OAQ = 60°$, rezultă că $\sphericalangle AOB = 120°$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Se consideră rombul $ABCD$ și se notează cu $O$ punctul de intersecție a diagonalelor rombului. Calculează măsurile unghiurilor rombului, știind că:
**a)** $\sphericalangle ABD = 33°$; **b)** $\sphericalangle ACD = 71°$; **c)** $\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle ABC$.

**2** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Mediatoarea diagonalei $AC$ intersectează dreptele $BC$ și $AD$ în punctele $M$ și $N$. Demonstrează că $AMCN$ este romb.

**3** Se consideră triunghiul isoscel $ABC$, cu $AB = AC$, și se notează cu $G$ centrul de greutate al triunghiului. Dacă punctul $H$ este simetricul punctului $A$ față de punctul $G$, demonstrează că $BHCG$ este romb.

**4** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Demonstrează că $ABCD$ este romb, dacă:
**a)** $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DAC$; **b)** $AC \perp BD$;
**c)** lungimea unei laturi este egală cu media aritmetică a lungimilor celorlalte trei laturi ale paralelogramului.

**5** **a)** Demonstrează că mijloacele laturilor unui dreptunghi sunt vârfurile unui romb (figura 8).
**b)** Demonstrează că mijloacele laturilor unui romb sunt vârfurile unui dreptunghi (figura 9).

**6** Un triunghi $ABC$ este isoscel, cu baza $BC$ (figura 10). Perpendiculara în punctul $B$ pe dreapta $BC$ se intersectează cu dreapta $AC$ în punctul $D$. Se notează cu $E$ punctul în care paralela prin punctul $B$ la dreapta $AC$ se intersectează cu paralela prin punctul $C$ la dreapta $AB$. Demonstrează că:
**a)** $\Delta BCE \equiv \Delta CBA$; **b)** $ABEC$ este romb; **c)** $AB = \dfrac{1}{2}CD$.

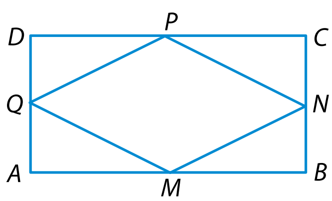


*Fig. 8*

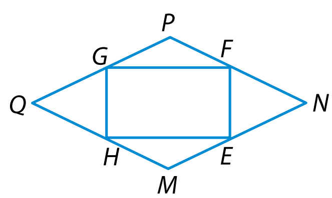


*Fig. 9*

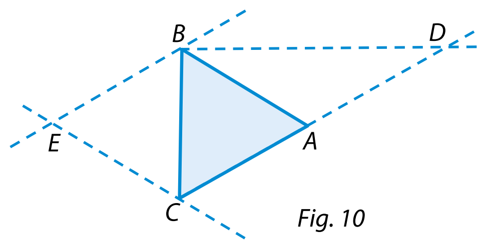


*Fig. 10*

**7** Un cerc cu centrul în vârful $A$ al unui unghi propriu intersectează laturile unghiului în punctele $B$ și $C$. Se notează cu $D$ punctul în care paralela prin punctul $C$ la dreapta $AB$ se intersectează cu paralela prin punctul $B$ la dreapta $AC$. Demonstrează că dreapta $AD$ este mediatoarea segmentului $BC$.

**8** Un triunghi $MNP$ are unghiul $M$ drept (figura 11). Bisectoarea unghiului $N$ intersectează latura $MP$ în punctul $Q$. Perpendiculara în punctul $P$ pe dreapta $NP$ intersectează dreapta $NQ$ în punctul $R$. Dacă $RS \parallel MP$ și $S \in MN$, demonstrează că:
**a)** triunghiul $QRP$ este isoscel;
**b)** patrulaterul $QPRS$ este romb.

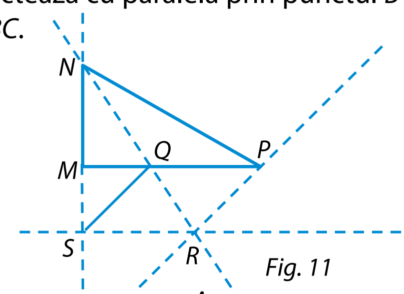


*Fig. 11*

**9** Punctul $D$ este simetricul vârfului $B$ al unui triunghi echilateral $ABC$ față de dreapta $AC$. Punctele $M$, $N$, $E$ și $F$ sunt mijloacele segmentelor $AB$, $BC$, $AD$, respectiv $DC$. Dacă $AN \cap CM = \{P\}$ și $AF \cap CE = \{Q\}$ (figura 12), demonstrează că:
**a)** $ABCD$ este romb;
**b)** $AMCF$ este dreptunghi;
**c)** $APCQ$ este romb.

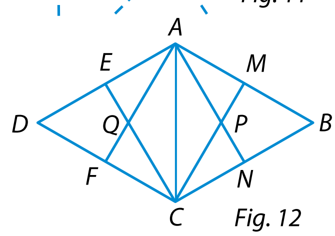


*Fig. 12*

**10** Un patrulater $ABCD$ are laturile $AB$, $AD$ și $DC$ congruente. Punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele laturilor $AB$ și $AD$, iar punctul $O$ este mijlocul diagonalei $AC$ (figura 13). Demonstrează că:

**a)** triunghiul $AON$ este isoscel;
**b)** dacă $ABCD$ este romb, atunci $AMON$ este romb;
**c)** dacă $AMON$ este romb, atunci $ABCD$ este romb.

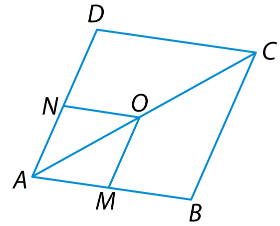


*Fig. 13*

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Rombul are diagonalele perpendiculare. **A** **F**
**b)** Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, paralelogramul este romb. **A** **F**
**c)** O diagonală a unui romb este bisectoarea unuia dintre unghiurile rombului. **A** **F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Se notează cu $O$ intersecția diagonalelor unui romb $MNPQ$. Dacă $MN = 2 \cdot OQ$, atunci:

| | |
|---|---|
| **a)** măsura unghiului $NMO$ este egală cu … | **1)** 30°; |
| **b)** măsura unghiului $OQM$ este egală cu … | **2)** 45°; |
| **c)** măsura unghiului $MQP$ este egală cu … | **3)** 90°; |
| **d)** măsura unghiului $QOP$ este egală cu … | **4)** 60°; |
| | **5)** 120°. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Se notează cu $O$ intersecția diagonalelor rombului $ABCD$. Dacă măsura unghiului $ABD$ este egală cu 37°, atunci măsura unghiului $ACD$ este egală cu $\boxed{\phantom{00}}$°.

# LECȚIA 6 Pătratul. Definiție și proprietăți

## Ne amintim

- definiția și proprietăți specifice paralelogramului, dreptunghiului și rombului;
- teorema medianei: *Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din lungimea ipotenuzei;*
- reciproca teoremei medianei: *Dacă într-un triunghi lungimea medianei este jumătate din lungimea laturii pe care cade, atunci triunghiul este dreptunghic;*
- proprietatea punctelor mediatoarei unui segment.

## Rezolvăm împreună

### Problema 1

Folosind echerul, desenează un unghi drept cu vârful în punctul $O$. Folosind compasul, construiește un cerc cu centrul în punctul $O$. Notează cu $A$, $B$, $C$ și $D$ intersecția cercului cu dreptele determinate de laturile unghiului și construiește patrulaterul convex $ABCD$. Demonstrează că *patrulaterul ABCD este romb cu un unghi drept*.

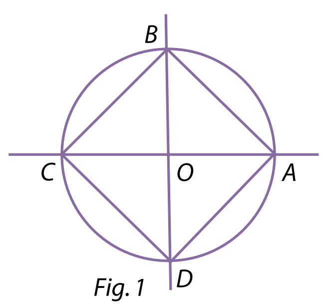
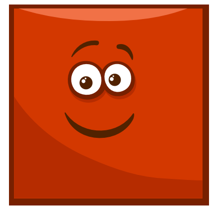


*Fig. 1*

***Demonstrație*** *(activitate frontală):* Rezultă figura 1, unde dreptele determinate de laturile unghiului drept sunt perpendiculare, adică $AC \perp BD$. Deoarece *razele unui cerc sunt congruente*, rezultă că $OA \equiv OB \equiv OC \equiv OD$ și $AC \equiv BD$. Prin urmare, patrulaterul *ABCD* are diagonalele congruente și punctul de intersecție a diagonalelor este mijlocul fiecărei diagonale. Cum $OA \equiv OC$, rezultă că *OB* este mediană a triunghiului *ABC* și $OB = \frac{1}{2}AC$. Conform *reciprocei teoremei medianei* rezultă că triunghiul *ABC* este dreptunghic și $\sphericalangle ABC = 90^\circ$.

- Deoarece diagonalele patrulaterului au același mijloc, rezultă că *patrulaterul ABCD este paralelogram*.
- Deoarece diagonalele paralelogramului sunt perpendiculare ($AC \perp BD$), *paralelogramul ABCD este romb.*
- Deoarece unghiul *ABC* este drept, *rombul ABCD are un unghi drept*.

Rezultă că *patrulaterul ABCD este romb cu un unghi drept.*



**Problema 2**

Se consideră un patrulater. Demonstrează că:

**a)** dacă patrulaterul este romb cu un unghi drept, atunci patrulaterul este dreptunghi cu două laturi consecutive congruente;

**b)** dacă patrulaterul este dreptunghi cu două laturi consecutive congruente, atunci patrulaterul este romb cu un unghi drept.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):* **a)** Conform definiției, *rombul este un paralelogram*. Având un unghi drept, *paralelogramul este dreptunghi* (vezi definiția dreptunghiului). Dar *rombul are laturile congruente* (vezi proprietățile rombului). Prin urmare, dacă *patrulaterul este romb cu un unghi drept,* rezultă că *patrulaterul este dreptunghi cu două laturi consecutive congruente.*

**b)** Conform definiției, *dreptunghiul este un paralelogram cu un unghi drept*. Având două laturi consecutive congruente, rezultă că *paralelogramul este romb* (vezi definiția rombului). Prin urmare, dacă *patrulaterul este dreptunghi cu două laturi consecutive congruente,* rezultă că *patrulaterul este romb cu un unghi drept.*

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Enunțul și rezolvarea problemelor anterioare scot în evidență următoarele două propoziții:

**(1)** patrulaterul *ABCD* este romb cu un unghi drept;

**(2)** patrulaterul *ABCD* este dreptunghi cu două laturi consecutive congruente.

Adăugăm acestora și propoziția:

**(3)** patrulaterul *ABCD* este paralelogram cu două laturi consecutive congruente și un unghi drept.

La punctul a) al problemei 2 am arătat că **(1) ⇒ (2)**.

Se citește: dacă (1) atunci (2) sau din (1) rezultă (2) sau (1) implică (2).

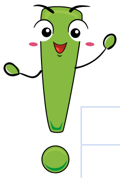
La punctul b) am arătat că **(2) ⇒ (1)**. Așadar, (1) ⇒ (2) și (2) ⇒ (1), ceea ce arată că afirmațiile (1) și (2) sunt echivalente, adică fiecare rezultă logic din cealaltă: (1) ⇔ (2).

Analog, se poate arăta că oricare două dintre cele trei afirmații sunt echivalente. Din acest motiv, oricare dintre cele trei afirmații poate fi **definiția pătratului**, iar celelalte două sunt **teoreme**.

### Reține!

- **Definiția pătratului**

  **Pătratul** este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente și un unghi drept.
- **Teoreme:**
  - **Pătratul** este dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente.
  - **Pătratul** este rombul cu un unghi drept.
- **Proprietățile pătratului:**
  - Pătratul are toate proprietățile paralelogramului.
  - Pătratul are toate proprietățile dreptunghiului.
  - Pătratul are toate proprietățile rombului.
- **Proprietăți specifice pătratului** (pe care nu le are dreptunghiul)**:**
  - laturile pătratului sunt congruente;
  - diagonalele pătratului sunt perpendiculare;
  - diagonalele pătratului sunt bisectoare ale unghiurilor acestuia.
- **Proprietăți specifice pătratului** (pe care nu le are rombul)**:**
  - unghiurile pătratului sunt drepte;
  - diagonalele pătratului sunt congruente.
- **Pentru a demonstra că un dreptunghi este pătrat, este suficient să arătăm că este îndeplinită una dintre următoarele condiții:**
  - dreptunghiul are două laturi consecutive congruente;
  - dreptunghiul are diagonalele perpendiculare;
  - o diagonală a dreptunghiului este bisectoarea unuia dintre unghiuri.
- **Pentru a demonstra că un romb este pătrat, este suficient să arătăm că:**
  - rombul are un unghi drept;
  - rombul are diagonalele congruente.



**Important**

**1.** Folosind foaia cu pătrățele poți desena foarte ușor un dreptunghi, un romb sau un pătrat.

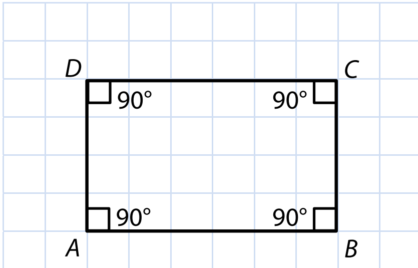



*Fig. 2*

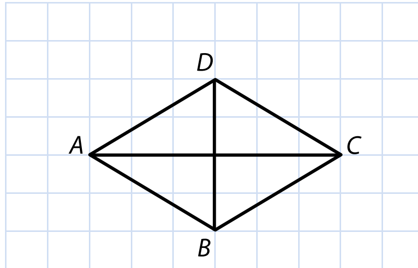



*Fig. 3*

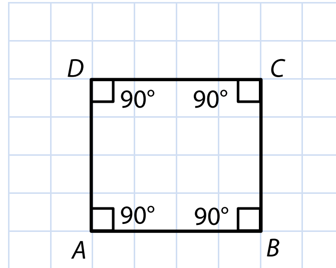



*Fig. 4*

Observă că unghiurile *A*, *B*, *C* și *D* sunt drepte, deci patrulaterul *ABCD* din figura 2 este dreptunghi.

Diagonalele patrulaterului *ABCD* din figura 3 sunt perpendiculare și se înjumătățesc, deci patrulaterul este romb.

Patrulaterul *ABCD* din figura 4 are unghiurile drepte și laturile congruente, deci este pătrat.

**2.** Notând cu $P$ mulțimea patrulaterelor, cu $P_{rl}$ mulțimea paralelogramelor, cu $D$ mulțimea dreptunghiurilor, cu $R$ mulțimea romburilor și cu $P_{tr}$ mulțimea pătratelor, rezultă (figura 5):

- $P_{tr} \subset D \subset P_{rl} \subset P$ (*orice pătrat este un dreptunghi; orice dreptunghi este un paralelogram; orice paralelogram este un patrulater*);
- $P_{tr} \subset R \subset P_{rl} \subset P$ (*orice pătrat este un romb; orice romb este un paralelogram; orice paralelogram este un patrulater*);
- $P_{tr} = D \cap R$ (*orice pătrat este și dreptunghi, și romb; orice figură geometrică care este și dreptunghi, și romb este un pătrat*).

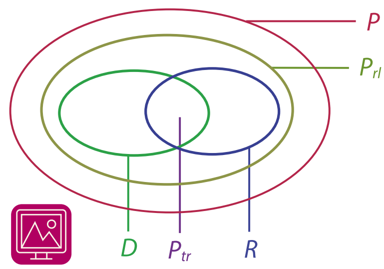



*Fig. 5*

## Aplicăm cunoștințele

Pe laturile unui unghi drept cu vârful în punctul *A* se consideră punctele *B* și *C*, astfel încât $AB \equiv AC$. Se notează cu *D* intersecția paralelei prin *C* la dreapta *AB* cu paralela prin *B* la dreapta *AC*. Demonstrează că patrulaterul *ABDC* este pătrat.

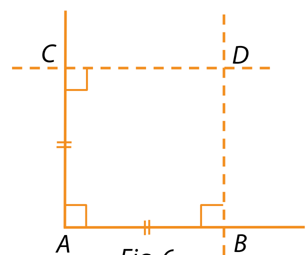



*Fig. 6*

**Reformulare** (figura 6)**:**

**Ipoteza:** $\sphericalangle BAC$ este drept, $AB \equiv AC$, $AB \parallel CD$ și $AC \parallel BD$.

**Concluzia:** *ABDC* este pătrat.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Observăm că dreapta *AC* este secantă pentru dreptele paralele *AB* și *CD*, iar unghiurile *BAC* și *ACD* sunt interne de aceeași parte a secantei. Din proprietatea unghiurilor determinate de două drepte paralele cu o secantă rezultă că unghiurile *BAC* și *ACD* sunt suplementare, adică $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACD = 180°$. Deoarece $\sphericalangle BAC = 90°$, rezultă că $\sphericalangle ACD = 90°$. Analog, deoarece $AC \parallel BD$, iar unghiurile *BAC* și *ABD* sunt interne de aceeași parte a secantei *AB*, rezultă că $\sphericalangle ABD = 90°$. Deoarece are trei unghiuri drepte, patrulaterul *ABDC* este dreptunghi. Deoarece dreptunghiul *ABDC* are două laturi consecutive congruente, patrulaterul *ABDC* este pătrat.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Construiește un pătrat *ABCD* cu:

**a)** lungimea laturii de 4 cm; **b)** lungimea diagonalei de 4 cm.

**2** Construiește un pătrat *ABCD*, notează cu *O* intersecția diagonalelor acestuia și scrie proprietățile referitoare la:

**a)** laturi; **b)** unghiuri; **c)** diagonale.

**3** Se notează cu *O* punctul de intersecție a diagonalelor unui pătrat *ABCD* și se consideră pe diagonale punctele *M*, *R*, *P* și *Q*, astfel încât $M, P \in AC$, $R, Q \in BD$ și $AM = BR = CP = DQ = \frac{1}{4}AB$. Demonstrează că patrulaterul *MRPQ* este pătrat.

**4** Demonstrează că patrulaterul determinat de mijloacele laturilor unui pătrat este un pătrat.

**5** Se consideră pătratul *ABCD* și punctul *M* situat în interiorul pătratului, astfel încât triunghiul *ABM* să fie echilateral.

**a)** Arată că triunghiul *ADM* este isoscel

**b)** Calculează măsurile unghiurilor *ADM*, *DMC* și *DCM*.

**6** Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel *ABC*, cu măsura unghiului *BAC* de 90°. Notăm cu *D* mijlocul laturii *BC*, cu *E*, mijlocul segmentului *AD* și cu *F* simetricul punctului *E* față de punctul *D*. Paralela prin *F* la dreapta *AB* intersectează dreapta *BC* în punctul *G* și paralela prin *F* la dreapta *AC* intersectează dreapta *BC* în punctul *H* (figura 7). Demonstrează că patrulaterul *EGFH* este pătrat.

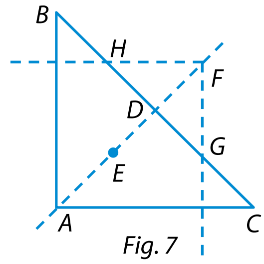


*Fig. 7*

**7** Dacă *MNPQ* este dreptunghi și $\sphericalangle PMN \equiv \sphericalangle QNP$, demonstrează că *MNPQ* este pătrat.

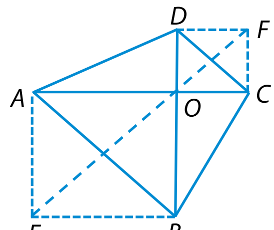


*Fig. 8*

**8** Diagonalele unui patrulater *ABCD* sunt perpendiculare, se intersectează în punctul *O*, $OA \equiv OB$ și $OC \equiv OD$ (figura 8). Dacă punctul *E* este simetricul punctului *O* față de dreapta *AB* și punctul *F* este simetricul punctului *O* față de dreapta *CD*, demonstrează că:

**a)** punctele *E*, *O*, *F*, sunt coliniare;

**b)** patrulaterele *AOBE* și *CODF* sunt pătrate.

**9** Se notează cu *O* punctul de intersecție a diagonalelor unui romb *ABCD* și pe semidreapta *OB* se consideră un punct *E* oarecare, $E \neq B$. Se notează cu *F* simetricul punctului *E* față de dreapta *AC*. Demonstrează că:

**a)** patrulaterul *AECF* este romb;

**b)** există un punct *E*, unic pe semidreapta *OB*, pentru care *AECF* este pătrat.

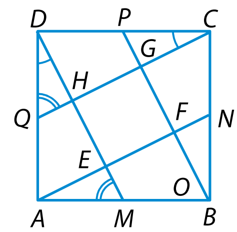


*Fig. 9*

**10** Punctele *M*, *N*, *P* și *Q* sunt mijloacele laturilor *AB*, *BC*, *CD* și *DA* ale pătratului *ABCD* (figura 9). Dacă $AN \cap DM = \{E\}$, $BP \cap AN = \{F\}$, $BP \cap CQ = \{E\}$, $CQ \cap DM = \{H\}$, arată că:

**a)** $\Delta CDQ \equiv \Delta DAM$;

**b)** $\sphericalangle DHQ \equiv 90°$;

**c)** patrulaterele *ANCQ* și *BMDP* sunt paralelograme;

**d)** patrulaterul *EFGH* este pătrat.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **4,5 puncte**

**a)** Rombul este un pătrat. **A** **F**

**b)** Pătratul este un romb. **A** **F**

**c)** Mijloacele laturilor unui romb cu diagonalele de lungimi diferite sunt vârfurile unui pătrat. **A** **F**

**2** **Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.** **2 puncte**

**A.** Un patrulater care are laturile congruente cu una dintre diagonale este pătrat.

**B.** Un patrulater care are diagonalele congruente este pătrat.

**C.** Un patrulater care are diagonalele congruente și perpendiculare este pătrat.

**D.** Mijloacele segmentelor determinate de vârfurile unui pătrat cu punctul de intersecție a diagonalelor acestuia formează un pătrat.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2,5 puncte**

Un triunghi *AOB* este dreptunghic și are vârful unghiului drept în punctul *O*. Se notează cu *C* simetricul punctului *A* față de punctul *O* și cu *D*, simetricul punctului *B* față de punctul *O*. Dacă *AC* = 6 cm, atunci patrulaterul *ABCD* este pătrat dacă lungimea segmentului *OB* este egală cu ☐ cm.

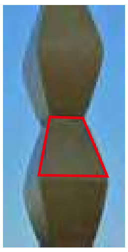
# LECȚIA 7 Trapezul. Definiție, clasificare și proprietăți. Linia mijlocie a trapezului

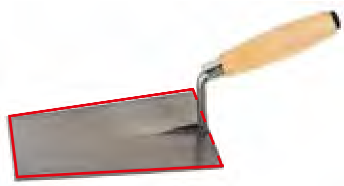
## Ne amintim

- definiția paralelogramului;
- definiția liniei mijlocii a unui triunghi, teorema liniei mijlocii și reciproca acesteia;
- axioma paralelelor.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Privind cu atenție muchiile opuse ale fețelor unor obiecte din jurul nostru, observăm că unele dintre ele sunt paralele, iar altele nu sunt paralele. De exemplu, unele muchii ale fețelor *Coloanei Infinitului*, ale fețelor unui ghiveci pentru flori, ale feței unei mistrii sau ale feței unei măsuțe.






Prin urmare, există patrulatere care au două laturi paralele și două laturi neparalele. Un astfel de patrulater se numește trapez. Laturile paralele sunt bazele trapezului (baza mică și baza mare).

Observăm figurile 1, 2, 3 și 4 de mai jos:

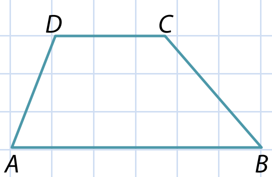


*Fig. 1*

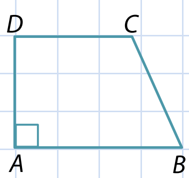


*Fig. 2*

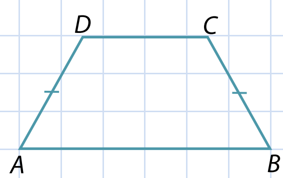


*Fig. 3*

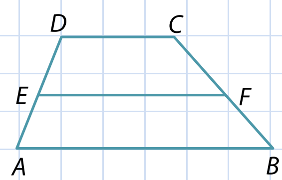


*Fig. 4*

1. Deoarece $AB \parallel CD$ și $AD \nparallel BC$, rezultă că $ABCD$ este trapez.
2. Latura $AB$ este *baza mare*, latura $CD$ este *baza mică*, iar $AD$ și $BC$ sunt *laturile neparalele*.
3. Unghiurile alăturate unei laturi neparalele ale unui trapez sunt suplementare.
4. Deoarece unghiul $BAD$ este drept, trapezul din figura 2 este trapez dreptunghic. Cum $AB \parallel CD$ și $AD$ este secantă, rezultă că unghiul $ADC$ este drept. Prin urmare, un trapez dreptunghic are două unghiuri drepte.
5. Deoarece $AD \equiv BC$, trapezul din figura 3 este trapez isoscel.
6. Noțiunea de linie mijlocie se întâlnește și la trapez. În figura 4, punctele $E$ și $F$ sunt mijloacele laturilor neparalele $AD$ și $BC$ ale trapezului $ABCD$. Segmentul $EF$ este numit linia mijlocie a trapezului.

## Rezolvăm împreună

### Problema 1

Dacă $E$ și $F$ sunt mijloacele laturilor neparalele $AD$ și $BC$ ale unui trapez $ABCD$, demonstrează că $EF$ este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

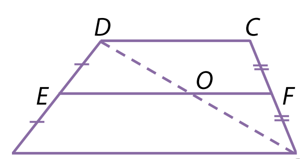


*Fig. 5*

Notăm cu $O$ mijlocul diagonalei $BD$ (figura 5). Atunci $EO$ este linie mijlocie a triunghiului $ABD$, iar $OF$ este linie mijlocie a triunghiului $CBD$. Aplicând teorema referitoare la linia mijlocie a unui triunghi, rezultă că $OE \parallel AB$ și $OF \parallel CD$. Cum $AB \parallel CD$, rezultă că $OE \parallel AB \parallel OF$. Deoarece prin punctul $O$, exterior dreptei $AB$, putem duce o singură paralelă la *AB* (axioma paralelelor), rezultă că punctele *E, O, F* sunt coliniare și $EF \parallel AB \parallel DC$. Din teorema referitoare la linia mijlocie a triunghiului, pentru triunghiurile *ABD* și *BCD*, avem $EO = \dfrac{AB}{2}$ și $OF = \dfrac{CD}{2}$. Prin adunare rezultă că $EF = OE + OF = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{CD}{2} = \dfrac{AB + CD}{2}$.

**Observație:** Deoarece *E* și *F* sunt mijloacele laturilor neparalele *AD* și *BC* ale trapezului *ABCD*, segmentul *EF* este linia mijlocie a trapezului. Prin urmare, lungimea liniei mijlocii a unui trapez este egală cu semisuma lungimilor bazelor trapezului.

## Problema 2

Dacă *E* este mijlocul laturii *AD* a unui trapez *ABCD*, cu $AB \parallel CD$, punctul *F* este pe latura *BC* astfel încât $EF \parallel AB$ și lungimea segmentului *EF* este egală cu semisuma lungimilor bazelor, demonstrează că *EF* este linia mijlocie a trapezului.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

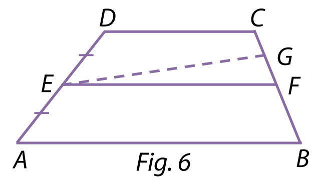


*Fig. 6*

Folosim *metoda reducerii la absurd*. Presupunem că punctul *F* nu este mijlocul laturii *BC*. În această situație, un alt punct *G* este mijlocul laturii *BC* (figura 6).
Prin urmare, *EG* este linia mijlocie a trapezului. Atunci $EG \parallel AB$. Dar din ipoteză $EF \parallel AB$, ceea ce este absurd, deoarece prin punctul *E* exterior dreptei *AB* putem duce o singură paralelă la *AB* (*axioma paralelelor*). Prin urmare, presupunerea că punctul *F* nu este mijlocul laturii *BC* este falsă. Rezultă că punctul *F* este mijlocul laturii *BC* și, cum din ipoteză *E* este mijlocul laturii *AD*, rezultă că *EF* este linia mijlocie a trapezului *ABCD*.

## Reține!

- **Definiții:**
  - **Trapezul** este un patrulater care are două laturi paralele și celelalte două laturi neparalele.
  Laturile paralele ale unui trapez se numesc **bazele trapezului**. Latura care are lungimea mai mare se numește **baza mare**, cealaltă numindu-se **baza mică**.
  - **Trapezul dreptunghic** este trapezul care are un unghi drept.
  - **Trapezul isoscel** este trapezul care are laturile neparalele congruente.
- **Linia mijlocie a unui trapez**
  - **Definiție:**
  **Linia mijlocie** a unui trapez este segmentul determinat de mijloacele laturilor neparalele ale trapezului.
  - **Teoremă:**
  Linia mijlocie a unui trapez este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor.
  - **Teorema reciprocă:**
  Paralela la baza unui trapez ce conține mijlocul unei laturi neparalele este linia mijlocie a trapezului.

## Aplicăm cunoștințele

Demonstrează că mijloacele diagonalelor unui trapez sunt situate pe linia mijlocie a trapezului și determină un segment cu lungimea egală cu modulul semidiferenței bazelor.

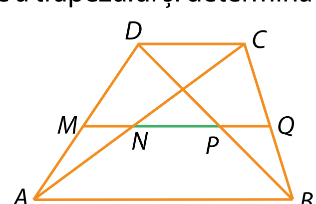


*Fig. 7*

**Reformulare** (figura 7)**:**

**Ipoteza:** $AB \parallel CD$ și $AD \nparallel BC$; *M* și *Q* – mijloacele laturilor *AD* și *BC*;
*N* și *P* – mijloacele diagonalelor *AC* și *BD*.

**Concluzia:** $N$ și $P \in MQ$ și $NP = \dfrac{|AB - CD|}{2}$.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Punctele care sunt vârfurile trapezului sunt notate cu *A, B, C* și *D*, astfel încât $AB > CD$. În caz contrar, redenumim vârfurile trapezului. Considerăm triunghiurile *ADC* și *ABC* și aplicăm teorema liniei mijlocii. Rezultă că $MN \parallel CD \parallel AB \parallel NQ$. Conform *axiomei paralelelor*, prin punctul *N* trece o singură paralelă la dreapta *AB*. Rezultă că dreptele *MN* și *NQ* coincid sau $N \in MQ$. Analog, arătăm că punctul *P* aparține dreptei *MQ*. Prin urmare, punctele $N$ și $P$ sunt situate pe dreapta $MQ$. Deoarece $MQ$ este linia mijlocie a trapezului și $N, P \in MQ$, rezultă că $NP \parallel AB \parallel DC$. Pentru liniile mijlocii ale triunghiurilor $ADC$ și $ABD$, avem: $MN = \frac{CD}{2}$, iar $MP = \frac{AB}{2}$. Rezultă că

$$NP = MP - MN = \frac{AB}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{AB - CD}{2} = \frac{|AB - CD|}{2}.$$

**Știai că...**

În anul 1934, sculptorul Constantin Brâncuși a fost invitat să ridice un monument pentru cinstirea faptelor eroice ale soldaților români din Primul Război Mondial, căzuți în 1916 în luptele de pe malul Jiului. Artistul dorise dintotdeauna „să facă ceva pentru țară”, așa că a acceptat bucuros comanda, socotind-o un punct culminant în cariera sa. Inaugurată la 27 octombrie 1938, *Coloana Infinitului* are o înălțime de 29,35 de metri și este compusă din 16 module suprapuse.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Scrie definițiile pentru:
**a)** trapez; **b)** trapez dreptunghic; **c)** trapez isoscel.

**2** Scrie teoremele care se referă la linia mijlocie a unui trapez.

**3** În trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, notăm cu $M$ și $N$ mijloacele laturilor $AD$ și $BC$, iar cu $P$ și $Q$ notăm intersecția dreptei $MN$ cu dreptele $AC$ și, respectiv, $BD$.

**a)** Dacă $AB = 18\sqrt{2}$ cm și $CD = 12\sqrt{2}$ cm, calculează lungimile segmentelor $MN$ și $PQ$.

**b)** Dacă $AB = 23\sqrt{3}$ cm și $MN = 20\sqrt{3}$ cm, calculează lungimile segmentelor $CD$ și $PQ$.

**c)** Dacă $CD = 5\sqrt{5}$ cm și $MN = 6\sqrt{5}$ cm, calculează lungimile segmentelor $AB$ și $PQ$.

**d)** Dacă $MN = 10\sqrt{7}$ cm și $PQ = 5\sqrt{7}$ cm, calculează lungimile segmentelor $AB$ și $CD$.

**4** Fie trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$.

**a)** Dacă $\sphericalangle A = 50°$ și $\sphericalangle C = 110°$, calculează măsurile unghiurilor $B$ și $D$.

**b)** Dacă trapezul este dreptunghic și $\sphericalangle B = 70°$, calculează măsurile unghiurilor $A$, $C$ și $D$.

**c)** Dacă trapezul este dreptunghic și triunghiul $ABC$ este dreptunghic isoscel, calculează măsurile unghiurilor trapezului.

**5** Într-un patrulater $MNPQ$ se știe că $\sphericalangle M = 70°$, $\sphericalangle N = 60°$ și $\sphericalangle Q = 110°$. Demonstrează că $MNPQ$ este trapez. Precizează bazele trapezului.

**6** În trapezul $ABCD$, notăm cu $M$ și $N$ mijloacele laturilor $AD$, respectiv $BC$. Știind că $\sphericalangle DMN = 47°$ și $\sphericalangle BNM = 107°$, determină măsurile unghiurilor trapezului.

**7** În trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $\sphericalangle A = 90°$, notăm cu $M$ mijlocul laturii $BC$.
Demonstrează că triunghiul $AMD$ este isoscel.

**8** În figura 8, $ABCD$ este un trapez, iar punctele $M$ și $N$ sunt situate pe segmentele $AD$, respectiv $BC$, astfel încât $MD = \frac{1}{4}AD$ și $CN = \frac{1}{4}BC$. Demonstrează că $MN = \frac{1}{4}(AB + 3CD)$.

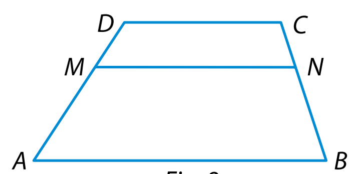


Fig. 8

**9** Baza mare a unui trapez dreptunghic $ABCD$, cu unghiul $BAD$ drept, este $AB$ și $AB = 2CD$. Notăm cu $M$ piciorul perpendicularei din $A$ pe dreapta $BC$. Demonstrează că triunghiul $AMD$ este isoscel.

**10** Un trapez $ABCD$ are bazele $AB$ și $CD$. Dacă $CD > AB$, $AD = AB + CD$ și $E$ este mijlocul segmentului $BC$, demonstrează că unghiul $AED$ este drept.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **4,5 puncte**

**a)** Trapezul este un paralelogram. **A** **F**

**b)** Paralelogramul este un trapez. **A** **F**

**c)** Fiecare diagonală a trapezului formează cu bazele acestuia unghiuri alterne interne congruente. **A** **F**

**2** **Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.** **2 puncte**

Un trapez dreptunghic are:

**A.** un singur unghi drept;
**B.** două unghiuri drepte și două unghiuri ascuțite;
**C.** două unghiuri drepte și două unghiuri obtuze;
**D.** două unghiuri drepte, un unghi ascuțit și un unghi obtuz.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2,5 puncte**

Dacă lungimea uneia dintre bazele unui trapez este de 7 cm, iar lungimea liniei mijlocii este de 8,5 cm, atunci lungimea celeilalte baze este egală cu ☐ cm.

# LECȚIA 8 Trapezul isoscel. Proprietățile trapezului isoscel

## Ne amintim

- definiția trapezului și a trapezului isoscel;
- criteriile de congruență a triunghiurilor și a triunghiurilor dreptunghice;
- proprietatea unghiurilor determinate de două drepte paralele cu o secantă;
- proprietățile triunghiului isoscel.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Pe foaia cu pătrățele (figura 1), construim un trapez isoscel astfel:
1) construim dreptunghiul $CDEF$, cu $CD = 6$ um și $DE = 5$ um;
2) pe dreapta $AB$, construim segmentele $AE = BF = 2$ um.

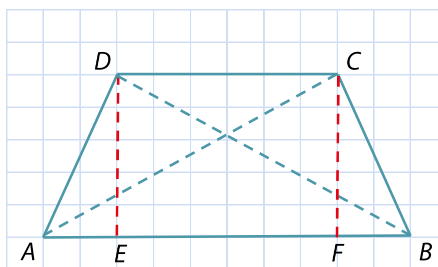


*Fig. 1*

◆ Patrulaterul $ABCD$ are laturile $AB$ și $CD$ paralele și de lungimi diferite (din construcție). Laturile $AD$ și $BC$ nu sunt paralele. În caz contrar, patrulaterul $ABCD$ ar fi paralelogram și laturile $AB$ și $CD$ ar avea lungimile egale, ceea ce este absurd, deoarece prin construcție $CD = 6$ um și $AB = 10$ um. Cum $ABCD$ are două laturi paralele și două neparalele, *patrulaterul ABCD este trapez*.

◆ Dreapta $BC$ este secanta dreptelor paralele $AB$ și $CD$. Cum $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DCB$ sunt unghiuri interne de aceeași parte a secantei, rezultă că unghiurile $ABC$ și $DCB$ sunt suplementare. Analog, demonstrăm că unghiurile $BAD$ și $ADC$ sunt suplementare. Prin urmare, *unghiurile alăturate laturilor neparalele ale unui trapez ABCD sunt suplementare.*

◆ Triunghiurile dreptunghice $BFC$ și $AED$ au catetele congruente ($FB = EA = 2$ um și $FC = ED = 5$ um). Conform *criteriului de concurență CC*, rezultă că $\Delta BFC \equiv \Delta AED$, de unde $BC \equiv AD$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$. Deci, laturile neparalele ale trapezului $ABCD$ sunt congruente. Rezultă că *trapezul ABCD este isoscel*. Reciproc, dacă un trapez $ABCD$ este isoscel, atunci $BC \equiv AD$. Construind perpendicularele $DE$ și $CF$ pe $AB$, rezultă că $\Delta BFC \equiv \Delta AED$ (criteriul de congruență IC), de unde $FB \equiv EA$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$.

**Observații:**

**1.** Deoarece $BC \equiv AD$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$ și $AB \equiv BA$, rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (criteriul de congruență LUL). Din congruența triunghiurilor $ABC$ și $BAD$ rezultă că $AC \equiv BD$. Prin urmare, trapezul isoscel $ABCD$ are diagonalele congruente.

**2.** Din $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BAD$ și din faptul că *unghiurile alăturate laturilor neparalele ale unui trapez ABCD sunt suplementare*, adică $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD = 180°$ și $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC = 180°$, rezultă că $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle ADC$. Prin urmare, unghiurile opuse ale unui trapez isoscel sunt suplementare și unghiurile alăturate unei baze sunt congruente.

Rezultă următoarele **proprietăți ale trapezului isoscel**:

**Teorema 1:** Unghiurile alăturate bazelor unui trapez isoscel sunt congruente (figura 2).

**Ipoteza:** $AB \parallel CD$, $BC \nparallel AD$ și $BC \equiv AD$.

**Concluzia:** $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle D$.

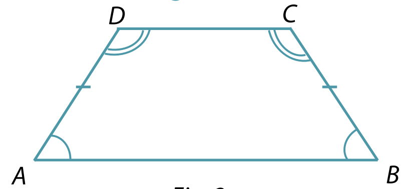



*Fig. 2*

**Teorema 2:** Diagonalele unui trapez isoscel sunt congruente (figura 3).

**Ipoteza:** $AB \parallel CD$, $BC \nparallel AD$ și $BC \equiv AD$.

**Concluzia:** $AC \equiv BD$.

Reciprocele teoremelor 1 și 2 ne oferă condiții suficiente ca un trapez să fie isoscel.

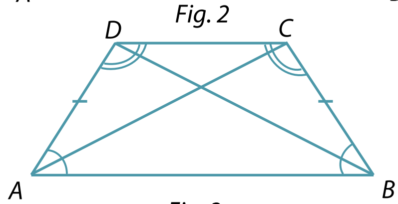



*Fig. 3*

**Activitate pe grupe:**

Folosindu-vă de figurile 2 și 3, demonstrați reciprocele teoremelor 1 și 2:

**1′)** Dacă unghiurile alăturate oricărei baze a unui trapez sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

**2′)** Dacă diagonalele unui trapez sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

## Reține!

- **Definiția trapezul isoscel**
  **Trapezul isoscel** este trapezul care are laturile neparalele congruente.
- **Proprietățile trapezului isoscel:**
  - unghiurile alăturate bazelor unui trapez isoscel sunt congruente;
  - diagonalele unui trapez isoscel sunt congruente.
- **Pentru a demonstra că un trapez este isoscel, este suficient să demonstrăm una dintre următoarele condiții:**
  - unghiurile alăturate uneia dintre bazele trapezului sunt congruente;
  - diagonalele trapezului sunt congruente.

## Aplicăm cunoștințele

Punctul de intersecție a diagonalelor unui trapez *ABCD*, notat cu *O*, formează cu bazele trapezului triunghiuri isoscele. Demonstrează că trapezul este isoscel.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Triunghiurile *OAB* și *OCD* fiind isoscele, cu bazele *AB*, respectiv *CD*, rezultă că $OA \equiv OB$ și $OC \equiv OD$ (figura 4). Din aceste congruențe și din faptul că $AC = OA + OC$ și $OB + OD = BD$ rezultă că $AC \equiv BD$, adică diagonalele trapezului *ABCD* sunt congruente și trapezul este isoscel.

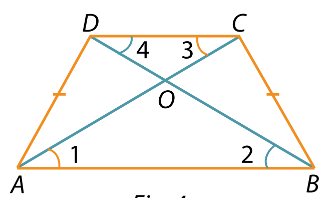



*Fig. 4*

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Un trapez isoscel are un unghi cu măsura de 45°. Determină măsurile celorlalte unghiuri ale trapezului.

**2** Fie un trapez isoscel *ABCD*, cu $AB \parallel CD$. Calculează măsurile unghiurilor trapezului, dacă:

**a)** $\sphericalangle A = 47°15'$; **b)** $\sphericalangle A = 2\sphericalangle D$; **c)** $\sphericalangle A = \frac{2}{3}\sphericalangle D$.

**3** Determină măsurile unghiurilor unui trapez isoscel *ABCD*, cu $AB \parallel CD$, dacă:

**a)** $AB = 12\sqrt{2}$ cm, $BC = 8\sqrt{2}$ cm și $CD = 4\sqrt{2}$ cm;

**b)** $AB = 12\sqrt{3}$ cm, $DC = 7\sqrt{3}$ cm și $AD = 5\sqrt{3}$ cm.

**4** În trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, măsurile unghiurilor $B$ și $C$ sunt direct proporționale cu 3 și 7, iar suma măsurilor unghiurilor $A$ și $B$ este egală cu 108°. Demonstrează că $ABCD$ este un trapez isoscel.

**5** În paralelogramul $ABCD$, cu $\measuredangle A > 90°$, bisectoarea unghiului $A$ intersectează latura $CD$ în punctul $M$. Dacă patrulaterul $AMCB$ este trapez isoscel, calculează măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$.

**6** Punctele $E$ și $F$ sunt pe laturile $AB$, respectiv $AC$ ale triunghiului $ABC$, astfel încât $AE = AF$. Dacă $EF \parallel BC$, demonstrează că $BCFE$ este trapez isoscel.

**7** În trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB > CD$, diagonalele **nu** sunt perpendiculare pe laturile neparalele. Construim $MC \perp AC$, $M \in AB$ și $NB \perp BD$, $N \in CD$. Demonstrează că:

**a)** $\Delta ACM \equiv \Delta DBN$; **b)** $AMND$ este paralelogram; **c)** $BMNC$ este trapez isoscel.

**8** În triunghiul $ABC$, cu $AB \neq AC$, notăm cu $E$, $F$ și $G$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$ și, respectiv, $AC$. Dacă $AH \perp BC$, $H \in BC$, demonstrează că patrulaterul cu vârfurile în punctele $E$, $H$, $F$ și $G$ este trapez isoscel.

**9** Trapezul $ABCD$ este isoscel, cu $AB \parallel CD$, și se notează cu $O$ punctul de intersecție a diagonalelor. Demonstrează că triunghiurile:

**a)** $AOB$ și $COD$ sunt isoscele; **b)** $BOC$ și $AOD$ sunt congruente.

**10** Demonstrează că, dacă un trapez isoscel are diagonalele perpendiculare, atunci înălțimea trapezului este egală cu lungimea liniei mijlocii a trapezului.

**11** Diagonalele unui dreptunghi $ABCD$ se intersectează în punctul $O$. Punctele $M$, $N$, $P$, $Q$ sunt mijloacele segmentelor $AO$, $BO$, $CO$ și, respectiv, $DO$. Demonstrează că:

**a)** patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi;
**b)** dacă patrulaterul $MNPQ$ este pătrat, atunci patrulaterul $ABCD$ este pătrat;
**c)** patrulaterul $ABNM$ este trapez isoscel.

**12** Diagonala $BD$ a paralelogramului $ABCD$ este congruentă cu latura $AD$ (figura 5). Cercul cu centrul în punctul $D$ și raza $AD$ intersectează dreapta $CD$ în punctele $E$ și $F$. Punctul $G$ este diametral opus punctului $A$ și se notează cu $H$ intersecția dreptelor $EF$ și $BG$. Demonstrează că:

**a)** patrulaterul $AEGF$ este dreptunghi;
**b)** patrulaterul $BCGD$ este romb;
**c)** patrulaterul $ABHD$ este trapez dreptunghic;
**d)** patrulaterul $ABEF$ este trapez isoscel.

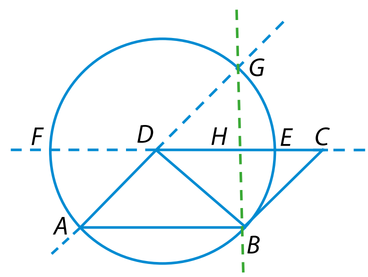



*Fig. 5*

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Trapezul isoscel este un patrulater care are diagonalele congruente și perpendiculare. **A F**

**b)** Patrulaterul care are diagonalele congruente și în care punctul de intersecție a diagonalelor este mijlocul fiecărei diagonale este trapez isoscel. **A F**

**c)** Dacă diagonalele unui trapez formează cu bazele acestuia triunghiuri isoscele, atunci trapezul este isoscel. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Dacă un trapez isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, are $AD = CD$ și $AB = 2CD$, atunci:

| | |
|---|---|
| **a)** $\measuredangle ABC$ are măsura egală cu … | **1)** 135°; |
| **b)** $\measuredangle CBD$ are măsura egală cu … | **2)** 120°; |
| **c)** $\measuredangle BDA$ are măsura egală cu … | **3)** 90°; |
| **d)** $\measuredangle BCD$ are măsura egală cu … | **4)** 60°; |
| | **5)** 30°. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Un trapez $ABCD$ este isoscel și $CD$ este baza mică. Dacă punctul $O$ este mijlocul bazei mari și patrulaterul $AOCD$ este romb, cu lungimile laturilor de 6 cm, atunci baza mare a trapezului are lungimea egală cu $\boxed{\phantom{000}}$ cm.

# LECȚIA 9 Perimetre și arii: paralelogram, paralelograme particulare, triunghi, trapez

Cu noțiunile de *perimetru*, *suprafață* și *arie* am fost familiarizați, în mod intuitiv, încă din clasele mici. Astfel, am învățat că aria permite compararea unor suprafețe în sensul de a stabili dacă o suprafață este mai mare sau mai mică decât alta. De asemenea, am învățat să calculăm ariile unor suprafețe. În cele ce urmează, vom defini noțiunea de *suprafață poligonală* și de *arie a unei suprafețe poligonale* și vom determina perimetrele și ariile unor suprafețe poligonale.

*Suprafață placată cu gresie*

## Ne amintim

- **perimetrul** unui triunghi, al unui pătrat și al unui dreptunghi;
- **aria** unui pătrat și aria unui dreptunghi;
- definiția înălțimii unui triunghi.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Considerând trei puncte necoliniare $A$, $B$ și $C$ (figura 1), acestea determină triunghiul $ABC$ (figura 2).
Punctul $P$ este punct interior triunghiului $ABC$ (figura 3).
**Suprafața triunghiulară** este reuniunea triunghiului cu interiorul său (figura 4).

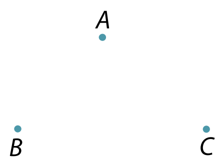



*Fig. 1*

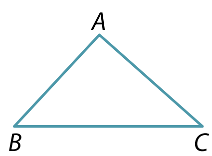



*Fig. 2*

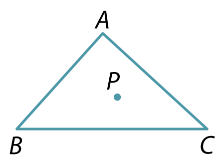



*Fig. 3*

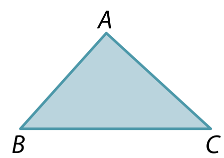



*Fig. 4*

**Suprafața poligonală** este reuniunea unui număr finit de suprafețe triunghiulare, cu interioarele disjuncte două câte două. Mulțimea suprafețelor triunghiulare respective constituie o **descompunere a suprafeței poligonale**.

Figura 5 ilustrează două suprafețe poligonale. Dreptele punctate din figură arată cum se descompune fiecare suprafață poligonală în suprafețe triunghiulare. Dacă $ABCD$ este un patrulater convex (figura 6), atunci el determină suprafața patrulateră convexă $ABCD$ (figura 7).

O suprafață poligonală este mărginită de un **poligon** (sau determină un poligon). Suma lungimilor laturilor unui poligon este **perimetrul poligonului**.

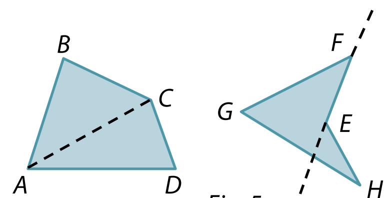



*Fig. 5*

Dacă patrulaterul convex este un pătrat, atunci suprafața patrulateră convexă se numește *suprafață pătrată* (figura 8), iar, dacă patrulaterul convex este un dreptunghi, atunci suprafața patrulateră se numește *suprafață dreptunghiulară* (figura 9).

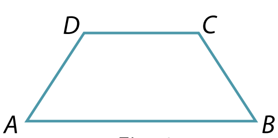



*Fig. 6*

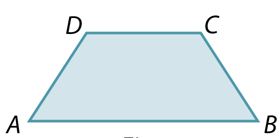



*Fig. 7*

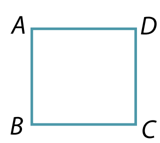



*Fig. 8*

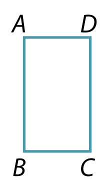



*Fig. 9*

**Aria unei suprafețe poligonale.** Pentru a putea fi comparate, suprafețele poligonale se măsoară. Unitatea de măsură este *metrul pătrat* ($m^2$), dar se utilizează și multiplii, respectiv submultiplii metrului pătrat ($km^2$, $hm^2$, $dam^2$, $dm^2$, $cm^2$, $mm^2$). Unitatea de măsură pentru suprafețe rezultă din unitatea de măsură pentru distanțe (de exemplu, dacă distanțele se măsoară în centimetri, suprafața se va măsura în centimetri pătrați).

Figura 10 ilustrează o unitate de măsură pentru distanțe și unitatea de măsură corespunzătoare pentru suprafețe.

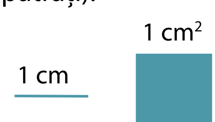



*Fig. 10*

Folosind unitatea de măsură, **fiecărei suprafețe poligonale îi corespunde un număr pozitiv unic**, care arată câte unități de măsură are suprafața respectivă. Acel număr se numește **aria suprafeței poligonale**.

Dacă $S$ este o suprafață poligonală, atunci aria ei se notează cu $\mathcal{A}_S$. De exemplu, figura 11 ilustrează $cm^2$, care este unitatea de măsură fixată, și suprafața poligonală $S$. Se observă că suprafața poligonală $S$ are aria, măsurată în $cm^2$, egală cu 3, adică $\mathcal{A}_S = 3$. Dacă dorim să punem în evidență unitatea de măsură fixată, vom scrie $\mathcal{A}_S = 3\ cm^2$ și citim: „aria suprafeței $S$ este egală cu $3\ cm^2$”. Vom accepta următoarele **proprietăți ale ariei**, evidente din punct de vedere intuitiv:

*Fig. 11*

**1.** Dacă două triunghiuri sunt congruente, atunci ariile suprafețelor triunghiulare determinate de cele două triunghiuri sunt egale.

**2.** Dacă o suprafață poligonală $S$ se descompune în suprafețele poligonale $S_1$ și $S_2$, cu interioarele disjuncte, atunci $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}_{S_1} + \mathcal{A}_{S_2}$ (figura 12).

**3.** Aria suprafeței pătrate este pătratul lungimii laturii sale.

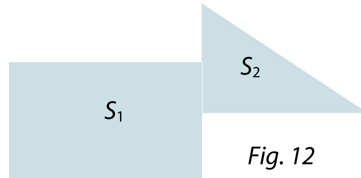
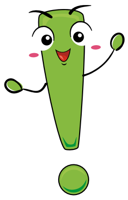


*Fig. 12*



**Important**

În continuare, vom spune pe scurt *aria pătratului*, *aria dreptunghiului*, *aria triunghiului*, *aria patrulaterului*, *aria poligonului* și vom înțelege că este vorba despre aria suprafeței pătratului, aria suprafeței dreptunghiului, aria suprafeței triunghiului, aria suprafeței patrulaterului sau aria suprafeței poligonului. Activitățile de învățare imediat următoare au drept țintă demonstrarea unor formule de calcul al ariilor unor suprafețe.

## Rezolvăm împreună

### Problema 1

Demonstrează că aria unui triunghi dreptunghic este egală cu semiprodusul lungimilor catetelor (figura 13).

**Ipoteza:** $AB \perp AC$.

**Concluzia:** $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$.

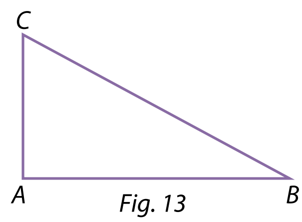


*Fig. 13*

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Construim paralela prin $C$ la $AB$, paralela prin $B$ la $AC$ și notăm cu $D$ punctul lor de intersecție (figura 14). Deoarece laturile opuse ale patrulaterului $ABDC$ sunt paralele și unghiul $BAC$ este drept, patrulaterul $ABDC$ este dreptunghi și $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$, adică $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{DCB}$. Cum $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{DCB}$, rezultă că $\mathcal{A}_{ABCD} = 2\mathcal{A}_{ABC}$.

Din $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot AC$ rezultă că $2\mathcal{A}_{ABC} = AB \cdot AC$ și $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$.

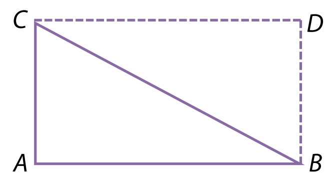


*Fig. 14*

### Problema 2

Demonstrează că aria unui triunghi este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare laturii respective (figura 15).

**Ipoteza:** $CD$ este înălțimea corespunzătoare laturii $AB$.

**Concluzia:** $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$.

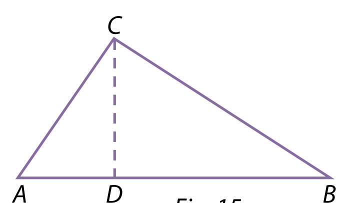


*Fig. 15*

***Demonstrație*** *(activitate pe grupe):*

Cazul când $D$, piciorul perpendicularei din $C$ pe $AB$, coincide cu punctul $A$ sau cu punctul $B$ a fost rezolvat în problema 1. Rămân posibile două cazuri: cazul când $D$ aparține laturii $AB$ (figura 15) și cazul când $D$ nu aparține laturii $AB$ (figura 16). În primul caz, din $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC} + \mathcal{A}_{DBC}$ și din $\mathcal{A}_{ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot CD$, $\mathcal{A}_{DBC} = \frac{1}{2} BD \cdot CD$ rezultă că $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$. În cazul al doilea, au loc egalitățile: $\mathcal{A}_{CDB} = \mathcal{A}_{CDA} + \mathcal{A}_{ABC}$;

$\frac{1}{2} BD \cdot CD = \frac{1}{2} AD \cdot CD + \mathcal{A}_{ABC}$; $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} BD \cdot CD - \frac{1}{2} AD \cdot CD$; $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot (BD - AD)$;

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$.

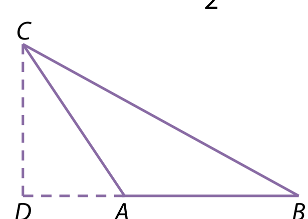
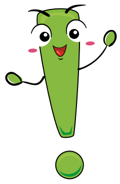


*Fig. 16*

Deci, aria unui triunghi este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare laturii respective.



**Important**

**1.** Termenul de înălțime desemnează fie un segment, fie lungimea acelui segment. Din context deducem despre ce este vorba.

**2.** Deoarece aria asociată unei suprafețe poligonale este egală cu un număr unic de unități de măsură (vezi proprietățile ariei), rezultă că *aria unui triunghi ABC nu depinde de alegerea înălțimii și a bazei corespunzătoare*.

## Problema 3

**a)** Se notează cu $A'$ piciorul perpendicularei din vârful $A$ al unui paralelogram $ABCD$ pe latura $CD$ (figura 17). Demonstrează că $\mathcal{A}_{ABCD} = CD \cdot AA'$.

**b)** Demonstrează că **aria unui romb** este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor rombului.

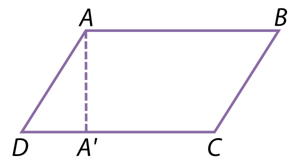



*Fig. 17*

***Demonstrație*** *(activitate individuală):*

**a)** Diagonala $AC$ descompune suprafața paralelogramului $ABCD$ în două suprafețe triunghiulare disjuncte, $ABC$ și $ADC$. Cum cele două triunghiuri sunt congruente, folosind proprietățile ariei, rezultă că $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ACD}$ și $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD}$ (figura 18).
Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD} = 2\mathcal{A}_{ACD} = CD \cdot AA'$.

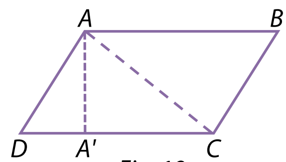



*Fig. 18*

**Observație:** Segmentul determinat de vârful $A$ al paralelogramului $ABCD$ și piciorul perpendicularei din $A$ pe latura $CD$, opusă vârfului, este înălțimea paralelogramului din vârful $A$ corespunzătoare laturii $CD$. Rezultă că aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare.

**b)** Dacă $ABCD$ este un romb (figura 19), aplicând *proprietățile diagonalelor rombului*, rezultă că diagonala $BD$ este perpendiculară pe diagonala $AC$, $BO = \dfrac{1}{2}BD$ sau $2BO = BD$.

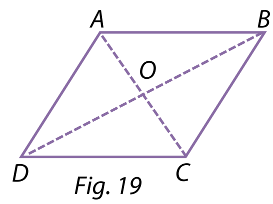



*Fig. 19*

Cum $BO \perp AC$, rezultă că $BO$ este înălțime în triunghiul $ABC$ și $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BO$. Prin înmulțire cu 2, rezultă că $2\mathcal{A}_{ABC} = AC \cdot BO$.

Cum $BO = \dfrac{1}{2}BD$, rezultă $2\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD$. Deoarece rombul este paralelogram, rezultă că $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ACD}$. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} = 2\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD$. Deci, $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD$, adică aria unui romb este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor.

## Problema 4

În trapezul $ABCD$ se notează cu $A'$ piciorul perpendicularei din vârful $A$ pe baza $CD$ (figura 20). Demonstrează că $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{AB + CD}{2} \cdot AA'$.

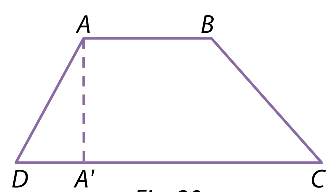



*Fig. 20*

***Demonstrație*** *(activitate individuală):*

Diagonala $AC$ descompune suprafața trapezului în suprafețele triunghiulare $ABC$ și $ADC$. Rezultă că $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ADC}$.

Construim înălțimea $CC'$ a triunghiului $ABC$ (figura 21). Rezultă că $AA'$ și $CC'$ sunt înălțimi ale triunghiurilor $ADC$ și $ABC$. Cum $AA' = CC'$, folosind formula de calcul pentru aria unui triunghi, rezultă că $\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{AB + CD}{2} \cdot AA'$. Deoarece segmentul determinat de un vârf al unei baze și piciorul perpendicularei din acel vârf pe cealaltă bază este înălțime a trapezului, rezultă că aria unui trapez este egală cu produsul dintre semisuma lungimilor bazelor și înălțimea trapezului.

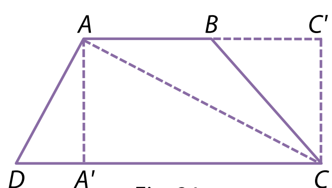
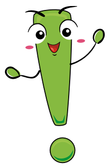



*Fig. 21*



**Important**
Deoarece aria asociată unei suprafețe poligonale este egală cu un număr unic de unități de măsură (vezi proprietățile ariei), rezultă că *aria unui paralelogram*, respectiv *aria unui trapez nu depind de alegerea vârfului și a înălțimii corespunzătoare*.

## Reține!

- **Definiții:**
  - **Perimetrul unui poligon** este suma lungimilor laturilor unui poligon.
  - **Înălțimea unui paralelogram** este segmentul determinat de un punct al unei laturi a paralelogramului și piciorul perpendicularei din acel punct pe latura opusă.
  - **Înălțimea unui trapez** este segmentul determinat de un punct al unei baze și piciorul perpendicularei din acel punct pe cealaltă bază.
- **Formule de calcul pentru arii:**
  - **Aria unui triunghi dreptunghic** este egală cu semiprodusul lungimilor catetelor.
  - **Aria unui triunghi** este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare.
  - **Aria unui paralelogram** este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare.
  - **Aria unui romb** este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor rombului.
  - **Aria unui trapez** este egală cu produsul dintre semisuma lungimilor bazelor și lungimea înălțimii.

## Aplicăm cunoștințele

Se consideră un triunghi isoscel $ABC$, cu $AB = AC$ (figura 22). Se știe că perimetrul triunghiului este egal cu 72 cm și că $AB = 26$ cm. Calculează:

**a)** aria triunghiului;

**b)** distanța de la punctul $B$ la latura $AC$, cu două zecimale exacte.

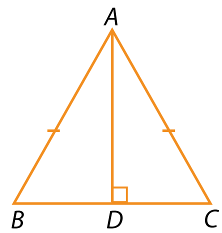


*Fig. 22*

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

**a)** Din enunț, $AB = AC = 26$ cm și $\mathscr{P}_{ABC} = 72$ cm, adică 26 cm + 26 cm + $BC$ = 72 cm. Obținem $BC = 20$ cm. Construim $AD \perp BC$. Cum triunghiul este isoscel, rezultă că $BD = CD = \dfrac{BC}{2} = 10$ cm. În triunghiul dreptunghic $ABD$, aplicăm teorema lui Pitagora și $AB^2 = BD^2 + AD^2$, adică $(26\text{ cm})^2 = (10\text{ cm})^2 + AD^2$. Obținem $AD^2 = 24^2\text{ cm}^2$ și $AD = 24$ cm.

Calculăm aria triunghiului și $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{BC \cdot AD}{2} = \dfrac{20\text{ cm} \cdot 24\text{ cm}}{2} = 240\text{ cm}^2$.

**b)** Pentru a calcula distanța de la punctul $B$ la latura $AC$, vom scrie formula ariei triunghiului folosind ca bază latura $AC$ și ca înălțime distanța de la punctul $B$ la latura $AC$, notată cu $d$.

Scriem aria triunghiului în două moduri. Deci, $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{AC \cdot d}{2}$. Dar $\mathscr{A}_{ABC} = 240\text{ cm}^2$ și $AC = 26$ cm. Înlocuind, obținem $240\text{ cm}^2 = \dfrac{26\text{ cm} \cdot d}{2}$, adică $d = 18{,}46$ cm.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Calculează lungimea diagonalei unui pătrat, știind că perimetrul acestuia este egal cu:
**a)** 24 cm; **b)** 4,8 dm; **c)** 18 cm.

**2** Calculează perimetrul și aria unui triunghi dreptunghic isoscel, știind că lungimea ipotenuzei este egală cu 20 cm.

**3** **a)** Calculează perimetrul și aria unui pătrat cu latura de $\sqrt{18}$ cm.
**b)** Calculează lungimea laturii și perimetrul unui pătrat care are aria egală cu $288\text{ cm}^2$.

**4** **a)** Calculează perimetrul și aria unui dreptunghi cu lungimile laturilor de $\sqrt{108}$ cm și $\sqrt{48}$ cm.

**b)** Calculează lungimea unei laturi a unui dreptunghi, știind că lungimea celeilalte laturi este de $4\sqrt{15}$ cm, iar aria este egală cu $80\sqrt{3}$ cm².

**5** Se știe că *ABCD* este un dreptunghi cu $AC \cap BD = \{O\}$, $AD = 12$ cm și $\mathcal{P}_{BOC} = 32$ cm. Calculează:
**a)** lungimile segmentelor *BD* și *CD*;
**b)** perimetrul și aria dreptunghiului *ABCD*.

**6** Fie *ABCD* un romb cu $\sphericalangle ABC = 120°$ și $AB = 12$ cm. Calculează:
**a)** perimetrul rombului;
**b)** lungimile diagonalelor rombului;
**c)** perimetrul triunghiului *ABC*;
**d)** aria rombului *ABCD*.

**7** Paralelogramul *ABCD* are $AB = 16$ cm, $BC = 12$ cm și $\sphericalangle A = 30°$. Calculează:
**a)** distanțele de la punctul *A* la dreptele *BC* și, respectiv, *DC*;
**b)** perimetrul și aria paralelogramului *ABCD*.

**8** Știind că *ABCD* este paralelogram și că $AC \cap BD = \{O\}$, demonstrează că:

$$\mathcal{A}_{AOB} = \mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{COD} = \mathcal{A}_{DOA} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{ABCD}.$$

**9** Se consideră un dreptunghi *ABCD* și un punct *E* interior dreptunghiului. Demonstrează că:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot (\mathcal{A}_{ABE} + \mathcal{A}_{CDE}) = 2 \cdot (\mathcal{A}_{ADE} + \mathcal{A}_{BCE}).$$

**10** Se consideră un triunghi *ABC* și se notează cu *M*, *N* și *P* mijloacele laturilor *AB*, *AC* și *BC*. Demonstrează că:

$$\mathcal{A}_{AMN} = \mathcal{A}_{BMP} = \mathcal{A}_{CNP} = \mathcal{A}_{MNP} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}.$$

**11** Rombul *ABCD* cu latura de 6 cm are $\sphericalangle ABC = 60°$. Calculează:
**a)** lungimile diagonalelor rombului;
**b)** perimetrul și aria rombului;
**c)** distanța de la vârful *B* la dreapta *CD*.

**12** Se știe că *ABCD* este trapez, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$.
**a)** Demonstrează că $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD}$.
**b)** Dacă $BC = AD$, demonstrează că $\mathcal{A}_{BOC} = \mathcal{A}_{AOD}$.
**c)** Dacă $AD = CD = BC = 10$ cm și $AB = 22$ cm, calculează perimetrul și aria trapezului *ABCD*.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

| | | |
|---|---|---|
| **a)** Aria triunghiului dreptunghic isoscel cu ipotenuza de $12\sqrt{2}$ cm este egală cu 72 cm². | **A** | **F** |
| **b)** Perimetrul unui pătrat cu aria de 128 cm² este egal cu $32\sqrt{2}$ cm. | **A** | **F** |
| **c)** Dacă punctul *M* este mijlocul laturii *BC* a triunghiului *ABC*, atunci $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{ACM}$. | **A** | **F** |

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**

Dacă paralelogramul *ABCD* are $AB = 50$ cm, $AD = 30$ cm și $DH = 24$ cm, unde $DH \perp AB$ ($H \in AB$), atunci:

| | |
|---|---|
| **a)** perimetrul, exprimat în centimetri, al patrulaterului *BCDH* este egal cu … | **1)** 1200; |
| **b)** aria, exprimată în centimetri pătrați, a trapezului *DHBC* este egală cu … | **2)** 600; |
| **c)** aria, exprimată în centimetri pătrați, a paralelogramului *ABCD* este egală cu … | **3)** 136 sau 172; |
| | **4)** 984 sau 1416. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

Lungimile diagonalelor rombului *ABCD* sunt egale cu 6 cm, respectiv 8 cm. Distanța de la vârful *C* la latura *AB* este egală cu ☐ cm.

# 1. PROBLEME RECAPITULATIVE

**1** Se dă dreptunghiul $ABCD$, cu $AB > BC$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $\sphericalangle BOC = 60°$ (figura 1).

a) Calculează măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$.

b) Dacă $AB = 9\sqrt{3}$ cm și $BC = 9$ cm, calculează perimetrul și aria triunghiului $AOB$.

c) Dacă $DE \perp AC$, $E \in AC$, demonstrează că $CE = 3 \cdot AE$.

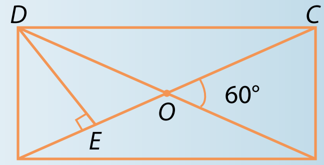


Fig. 1

**2** În trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, se știe că $AD = BC = CD = \frac{1}{2}AB$ și se notează cu $O$ mijlocul laturii $AB$ (figura 2).

a) Demonstrează că $AOCD$ este romb.

b) Calculează măsurile unghiurilor trapezului.

c) Demonstrează că $AD \perp BD$.

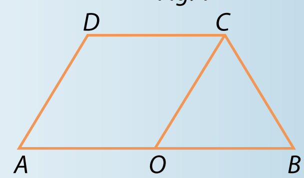


Fig. 2

**3** În paralelogramul $ABCD$, se știe că $AD = 12$ cm, $BD = 12\sqrt{3}$ cm și $BD \perp BC$. Se notează cu $E$ simetricul punctului $D$ față de punctul $A$ și cu $O$, intersecția dreptelor $EC$ și $AB$ (figura 3).

a) Arată că $CO = EO$.

b) Calculează aria triunghiului $BED$ și aria paralelogramului $ABCD$.

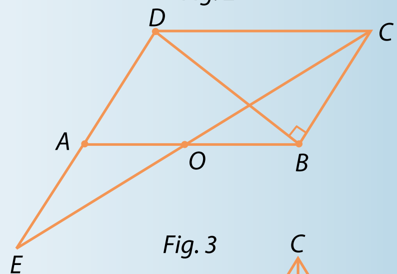


Fig. 3

**4** În trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, se știe că $\sphericalangle ABC = 60°$ și $CD = BC = 6$ cm (figura 4).

a) Determină lungimea laturii $AB$.

b) Dacă $E$ este punctul de intersecție a dreptelor $AD$ și $BC$, calculează perimetrul triunghiului $ABE$.

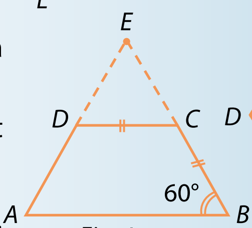


Fig. 4

**5** Rombul $ABCD$ are $\sphericalangle A = 60°$, $AC \cap BD = \{O\}$, iar punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele laturilor $AB$, respectiv $BC$ (figura 5).

a) Demonstrează că $AMNC$ este trapez isoscel.

b) Dacă $AO = 6\sqrt{3}$ cm și $DO = 6$ cm, calculează aria rombului $ABCD$ și aria trapezului $AMNC$.

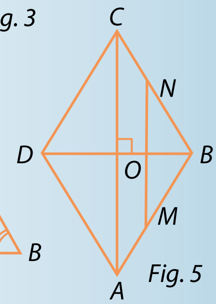


Fig. 5

**6** În trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$, se știe că $AB = 24$ cm, $CD = 12$ cm și $\sphericalangle ABC = 45°$ (figura 6).

a) Demonstrează că $AC \perp BC$.

b) Dacă $CE \parallel AD$, $E \in AB$, demonstrează că $DE \perp AC$ și calculează aria trapezului $ABCD$.

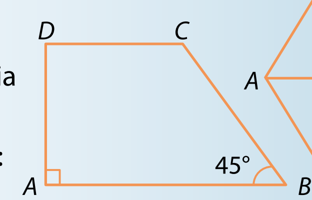


Fig. 6

**7** În rombul $ABCD$, se știe că $\sphericalangle B = 30°$ și $AB = 8$ cm (figura 7). Calculează:

a) distanța de la punctul $A$ la dreapta $BC$; b) aria rombului $ABCD$.

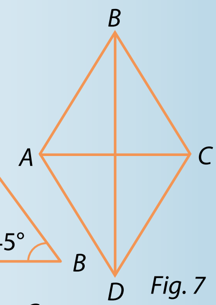


Fig. 7

**8** Trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$, are $AB = 32$ cm și $CD = 20$ cm. Se notează cu $E$ piciorul perpendicularei din punctul $C$ pe latura $AB$ (figura 8). Dacă aria triunghiului $BEC$ este egală cu $108$ cm$^2$, calculează:

a) lungimea segmentului $BE$; b) aria trapezului $ABCD$;

c) aria triunghiului $BCD$.

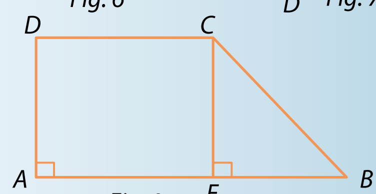


Fig. 8

**9** Triunghiul $ABC$ are $\sphericalangle B > 90°$ și punctul $D$ este piciorul perpendicularei din $B$ pe $AC$. Se notează cu $E$ și $F$ mijloacele laturilor $BC$ și $AB$, iar cu $M$ și $N$ se notează simetricele punctului $D$ față de punctele $E$ și $F$ (figura 9). Demonstrează că:

a) patrulaterul $MBDC$ este dreptunghi;

b) patrulaterul $NADB$ este dreptunghi;

c) punctele $M$, $B$ și $N$ sunt coliniare.

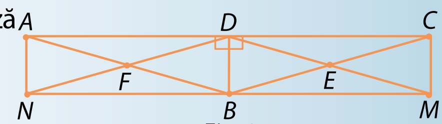


Fig. 9

**10** Diagonalele unui patrulater $ABCD$ sunt perpendiculare și se intersectează în punctul $O$, astfel încât $OA = 2 \cdot OC$ și $OB = 2 \cdot OD$. Se notează cu $E$ și $F$ mijloacele segmentelor $OA$, respectiv $OB$ (figura 10). Demonstrează că:

a) patrulaterul $EFCD$ este romb;

b) patrulaterul $ABCD$ este trapez;

c) trapezul $ABCD$ este isoscel dacă și numai dacă rombul $EFCD$ este pătrat.

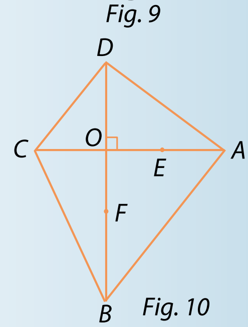


Fig. 10

# 2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

(5p) 1. Dacă un paralelogram are diagonalele perpendiculare, atunci el este … sau … .

(5p) 2. Un trapez isoscel are unghiurile alăturate bazelor … .

(5p) 3. Într-un paralelogram, unghiurile alăturate sunt … .

(5p) 4. Dacă diagonalele unui dreptunghi sunt perpendiculare, atunci dreptunghiul este … .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**

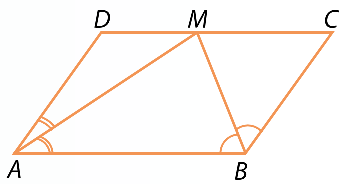
| A | B |
|---|---|
| (5p) 1. Un romb care are un unghi drept și lungimea unei laturi egală cu 4 cm are aria egală cu … | a) 9 $cm^2$; |
| (5p) 2. Un paralelogram *ABCD* cu un unghi drept și cu $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm are aria egală cu … | b) 24 $cm^2$; |
| (5p) 3. Aria unui pătrat cu lungimea diagonalei de $3\sqrt{2}$ cm este egală cu … | c) 16 $cm^2$; |
| (5p) 4. Un paralelogram *ABCD*, cu $AC \perp BD$, $AC = 6$ cm și $BD = 8$ cm, are aria egală cu … | d) 18 $cm^2$; |
| | e) 48 $cm^2$. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Măsurile unghiurilor unui patrulater convex sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 5, respectiv 6. Cel mai mic unghi al patrulaterului are măsura egală cu:
A. 40°; B. 20°; C. 60°; D. 80°.

(5p) 2. Perimetrul unui dreptunghi *ABCD* este egal cu 60 cm. Dacă $AB = 1{,}5 \cdot BC$, atunci aria dreptunghiului este egală cu:
A. 216 $cm^2$; B. 108 $cm^2$; C. 90 $cm^2$; D. 324 $cm^2$.

(5p) 3. În figura alăturată, semidreptele *AM* și *BM* sunt bisectoarele unghiurilor *BAD* și *ABC* ale paralelogramului *ABCD*. Măsura unghiului *AMB* este egală cu:
A. 45°; B. 30°;
C. 60°; D. 90°.




(5p) 4. Patrulaterul *ABCD* are diagonalele perpendiculare și de lungimi diferite. Dacă *M*, *N*, *P*, *Q* sunt respectiv mijloacele laturilor *AB*, *BC*, *CD* și *DA*, atunci *MNPQ* este:
A. trapez; B. pătrat; C. romb; D. dreptunghi.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

IV. Segmentul *MN* este linie mijlocie a trapezului *ABCD*, $M \in AD$ și $N \in BC$, iar punctul *P* este simetricul punctului *M* față de punctul *N*.

(5p) a) Demonstrează că *MBPC* este paralelogram.

(5p) b) Arată că $MP = AB + CD$.

(5p) c) Dacă $\sphericalangle ABC = 90°$, demonstrează că *MBPC* este romb.

V. Patrulaterul *ABCD* este un trapez cu $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle C = 120°$ și $AB = 12$ cm. Punctul *M* aparține laturii *AB* și patrulaterul *AMCD* este romb.

(5p) a) Demonstrează că *ABCD* este trapez isoscel.

(5p) b) Demonstrează că diagonalele trapezului *ABCD* nu sunt perpendiculare.

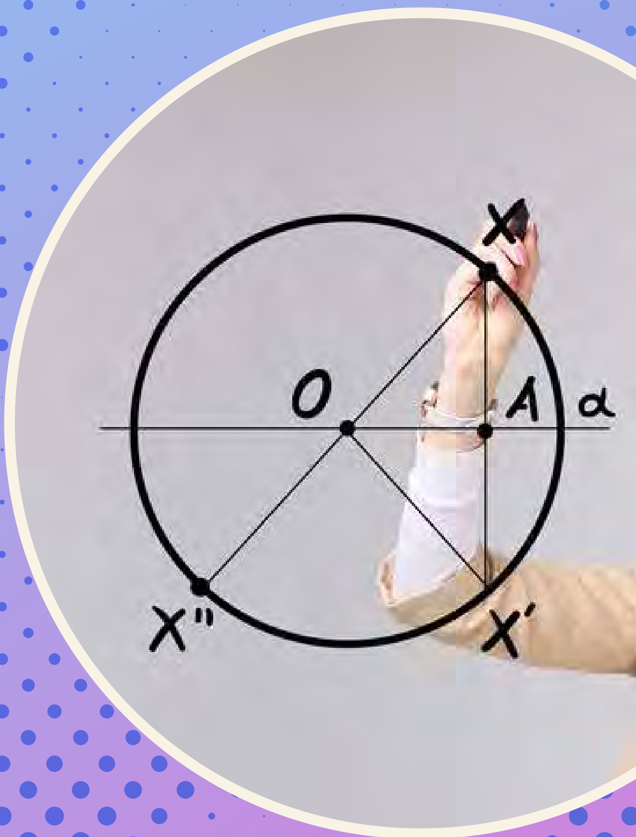
(5p) c) Calculează perimetrul trapezului *ABCD*.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# 5

# CERCUL




**Unitatea: Cercul**



**Evaluare: Cercul**

# UNITATEA: CERCUL

## LECȚIA 1 Unghi înscris în cerc

### Ne amintim

- cercul de centru $O$ și de rază $r$, elemente, proprietăți;
- unghiul la centru, măsura unghiului.

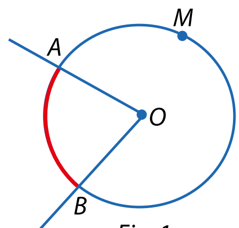


Fig. 1

În figura 1:
$\sphericalangle AOB$ este unghi la centru;
$\overset{\frown}{AB}$ este arcul de cerc corespunzător unghiului la centru;
$\overset{\frown}{AB}$ este un arc mic de cerc;
$\overset{\frown}{AMB}$ este un arc mare de cerc.

### Observăm și descoperim cunoștințe noi

Unghiul din figura 2 are vârful $B$ pe un cerc cu centrul $O$. Cercul determină pe laturile $BA$ și $BC$ ale unghiului $ABC$ coardele $BA$ și $BC$. Un unghi care are vârful pe un cerc și ale cărui laturi sunt secante cercului se numește unghi înscris în cerc. Arcul $AC$ este cuprins între laturile unghiului $ABC$. Unghiul $CDE$ (figura 3) nu este unghi înscris în cerc, deoarece cercul nu determină pe laturile $DC$ și $DE$ două coarde. Unghiul $EFG$ din figura 4 nu este unghi înscris în cerc, deoarece nu are vârful pe cerc.

Pentru un unghi $ABC$ înscris într-un cerc cu centrul în punctul $O$, centrul cercului poate fi: pe o latură a unghiului (figura 5), în interiorul unghiului (figura 6) sau în exteriorul unghiului (figura 7). Unghiul $AOC$ este unghi la centru și $\sphericalangle AOC = \overset{\frown}{AC}$.

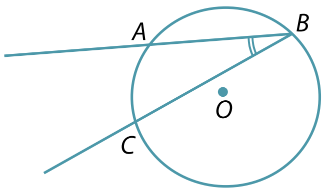


Fig. 2

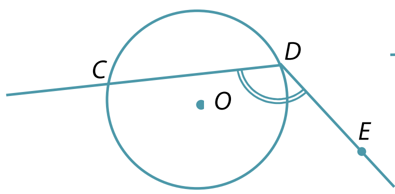


Fig. 3

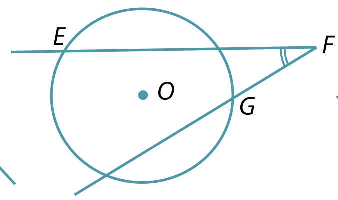


Fig. 4

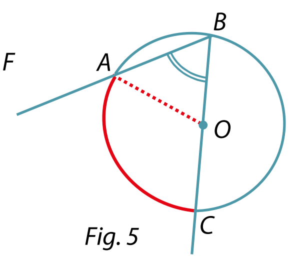


Fig. 5

Cum se exprimă **măsura unui unghi înscris în cerc** în funcție de măsura arcului cuprins între laturile sale?

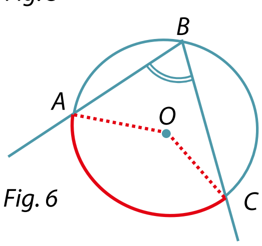


Fig. 6

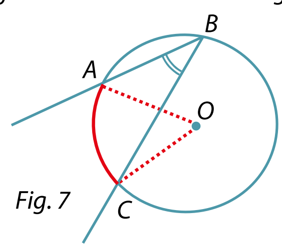


Fig. 7

### Rezolvăm împreună

**PROBLEMA 1**

Unghiul $ABC$ este unghi înscris într-un cerc de centru $O$. Dacă segmentul $BC$ este diametrul cercului, demonstrează că măsura unghiului $ABC$ înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturi (figura 8).

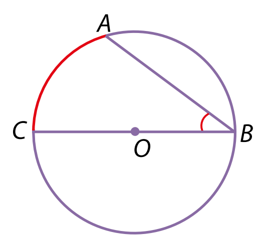


Fig. 8

**Ipoteza:** $\sphericalangle ABC$ este înscris în cerc; $BC$ – diametru.

**Concluzia:** $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Din $OB = OA = r$ rezultă că triunghiul $AOB$ este isoscel (figura 9), de unde $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle ABO$.
Unghiul $AOC$ este exterior triunghiului $AOB$, deci $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BAO + \sphericalangle ABO = 2 \cdot \sphericalangle ABO = 2 \cdot \sphericalangle ABC$.
Dar unghiul $AOC$ este unghi la centru și are măsura egală cu măsura arcului mic $AC$.
Rezultă că $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

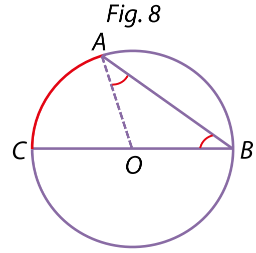


Fig. 9

## PROBLEMA 2

Unghiul *ABC* este unghi înscris într-un cerc de centru *O*. Dacă punctul *O* este interior unghiului *ABC*, demonstrează că măsura unghiului *ABC* înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturi (figura 10).

**Ipoteza:** $\sphericalangle ABC$ este înscris în cerc; *O* este interior unghiului *ABC*.

**Concluzia:** $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$.

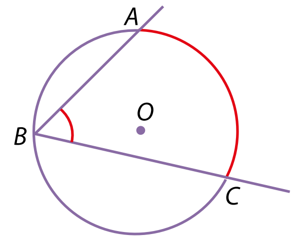


*Fig. 10*

***Demonstrație*** *(activitate pe grupe):*

Notăm cu *D* punctul diametral opus punctului *B* (figura 11). Diametrul *BD* determină cu laturile unghiului *ABC* două unghiuri adiacente, *ABD* și *CBD*, înscrise în cerc. Aplicând pentru fiecare rezultatul din problema anterioară, obținem:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}.$$

Analog, se demonstrează că măsura unghiului *ABC* înscris într-un cerc de centru *O* este jumătate din măsura arcului cuprins între laturi și în cazul în care punctul *O* este în exteriorul unghiului (figura 7).

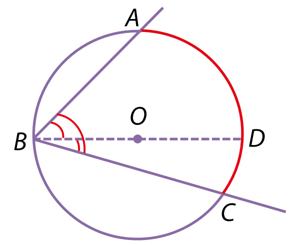
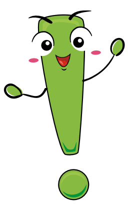


*Fig. 11*

### Reține!

- **Definiție:** Un unghi care are vârful pe un cerc și ale cărui laturi sunt secante cercului se numește **unghi înscris în cerc**.
- **Proprietatea unghiului înscris în cerc:** Măsura unui unghi înscris în cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.



**Important.** Se mai folosesc următoarele noțiuni:
- **arc subîntins** (este arcul de cerc cuprins între laturile unui unghi înscris în cerc);
- **unghi înscris într-un semicerc dat** (este unghiul înscris într-un cerc care subîntinde între laturile lui un semicerc);
- **unghi înscris într-un arc de cerc dat** (este unghiul înscris într-un cerc care subîntinde între laturile lui arcul dat).

## Aplicăm cunoștințele

### PROBLEMA 1

**a)** Demonstrează că orice unghi înscris într-un semicerc este unghi drept.

**b)** Arată că, dacă arcul de cerc subîntins de laturile unui unghi are măsura de 180°, atunci unghiul este drept.

***Demonstrație*** *(activitate pe grupe):*

**a)** Dacă un unghi oarecare *ABC* este înscris în semicercul *ABC*, rezultă că unghiul *ABC* subîntinde între laturile lui semicercul *ADC*, parte a cercului cu centru în punctul *O* (figura 12).

Aplicând proprietatea unghiului înscris în cerc, rezultă $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

**b)** Dacă arcul de cerc $\overset{\frown}{ADC}$ subîntins de laturile unui unghi *ABC* are măsura de 180°, rezultă că unghiul *ABC* este înscris în semicercul *ABC* și atunci unghiul *ABC* este drept.

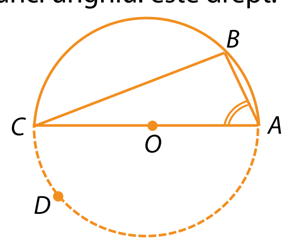


*Fig. 12*

### PROBLEMA 2

Unghiul *ABC* este înscris în cercul cu centrul în punctul *O* și raza de 2 cm și $\sphericalangle ABC = 30°$ (figura 13). Calculează lungimea coardei *AC*.

***Demonstrație*** *(activitate individuală):* Din $\sphericalangle ABC = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ și $\sphericalangle ABC = 30°$ rezultă că $30° = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ și $\overset{\frown}{AC} = 60°$. Unghiul *AOC* este unghi la centru și $\sphericalangle AOC = \overset{\frown}{AC} = 60°$. Cum triunghiul *AOC* este isoscel ($AO = CO$) și $\sphericalangle AOC = 60°$, rezultă că triunghiul *AOC* este echilateral și atunci $AC = AO = CO = 2$ cm.

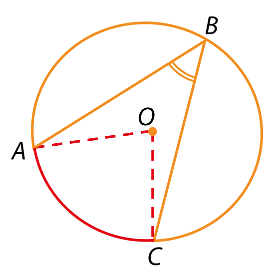


*Fig. 13*

## Problema 3

Pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele *A*, *B* și *C*, astfel încât $O \in AC$ și $\sphericalangle BAC = 30°$ (figura 14).

**a)** Calculează măsurile arcelor *AB*, *BC* și *CA*.

**b)** Calculează măsurile unghiurilor *B* și *C* ale triunghiului *ABC*.

**c)** Arată că *BC* este o coardă congruentă cu raza cercului.

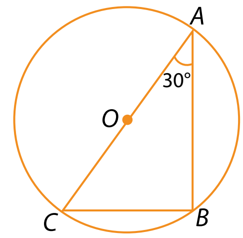



*Fig. 14*

***Demonstrație** (activitate pe grupe):*

**a)** Dacă $A \in \mathcal{C}(O, r)$, $C \in \mathcal{C}(O, r)$ și $O \in AC$, atunci punctele *A* și *C* sunt puncte diametral opuse și $\overset{\frown}{ABC} = 180°$.

Dacă *A*, *B* și *C* se află pe cerc, unghiul *BAC* este unghi înscris și $\sphericalangle BAC = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$. Din enunț avem $\sphericalangle BAC = 30°$ și, cum $\sphericalangle BAC = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, rezultă că $30° = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ și $\overset{\frown}{BC} = 60°$.

Calculăm $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{BC} = 180° - 60° = 120°$. Deci, $\overset{\frown}{AB} = 120°$, $\overset{\frown}{BC} = 60°$ și $\overset{\frown}{AC} = 180°$.

**b)** Unghiul *ACB* este unghi înscris în cerc și $\sphericalangle ACB = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$.

Unghiul *ABC* poate fi calculat și ținând cont că suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°. În acest caz, $\sphericalangle ABC = 180° - (\sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA) = 180° - (30° + 60°) = 90°$.

Calculăm măsura unghiului *ABC*, știind că este unghi înscris în cerc. Ca urmare, $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$. Deci, $\sphericalangle ABC = 90°$.

**Observație:** Orice unghi înscris într-un semicerc este unghi drept.

**c)** În triunghiul *ABC*, cu $\sphericalangle B = 90°$ și $\sphericalangle A = 30°$, din teorema *lungimea catetei opuse unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză* rezultă că $BC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2r}{2} = r$. Deci, $BC = r$ și, ca urmare, coarda *BC* este congruentă cu raza cercului.

### Proiect

Demonstrează următoarele teoreme:

**Teorema 1.** Măsura unui unghi cu vârful în interiorul unui cerc este egală cu semisuma dintre măsura arcului cuprins între laturile sale și măsura arcului cuprins între laturile unghiului opus la vârf (figura *a*).

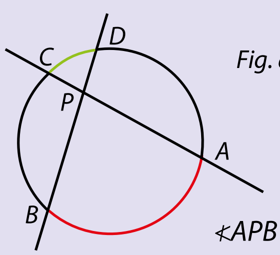



*Fig. a*

$$\sphericalangle APB = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}\right)$$

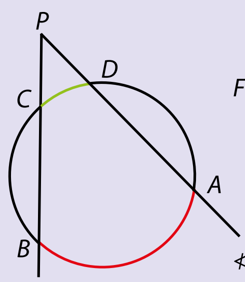



*Fig. b*

$$\sphericalangle APB = \frac{1}{2}\left|\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}\right|$$

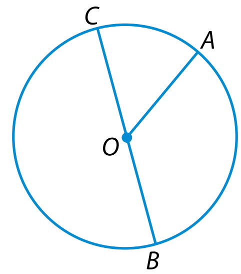
**Teorema 2.** Măsura unui unghi cu vârful în exteriorul unui cerc și ale cărui laturi intersectează cercul este egală cu modulul semidiferenței dintre măsurile arcelor cuprinse între laturile unghiului (figura *b*).

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** **a)** Desenează un cerc $\mathcal{C}(O, r = 2\text{ cm})$, o coardă *AB*, un diametru *CD* și un arc de cerc *EF*, cu măsura de 60°.

**b)** Precizează lungimea coardei *EF* și natura triunghiului *EOF*.

**2** Se consideră trei puncte distincte și necoliniare, *A*, *B* și *C*. Precizează cum poți determina centrul cercului care conține (trece prin) punctele *A*, *B* și *C*.




**3** În figura alăturată este reprezentat un cerc $\mathcal{C}(O, r = OA)$, cu diametrul $BC$.

**a)** Demonstrează că $\sphericalangle BAC = 90°$.

**b)** Dacă $\sphericalangle ABC = 30°$, atunci coarda $AC$ este congruentă cu raza cercului.

**c)** Dacă $AC = OA$, calculează măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CBA}$ și $\overset{\frown}{BCA}$.

**4** Pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$, se iau punctele $A$, $B$, $C$ și $D$. Știind că $\sphericalangle CBD = \alpha°$, calculează măsurile unghiurilor $DAC$ și $DOC$.

**5** Pe un cerc, se consideră punctele $A$, $B$ și $C$. Determină măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$, știind că măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CA}$ sunt direct proporționale cu numerele:

**a)** 2, 3 și 4; **b)** 18, 19 și 23.

**6** Pe un cerc, se consideră punctele $M$, $N$ și $P$. Determină măsurile unghiurilor triunghiului $MNP$, știind că măsurile arcelor $\overset{\frown}{MN}$, $\overset{\frown}{NP}$ și $\overset{\frown}{MP}$ sunt invers proporționale cu numerele:

**a)** 0,5; 0,(3); 0,2; **b)** 0,1; 0,(1); 0,2.

**7** Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, se consideră punctele $A$, $B$ și $C$. Calculează raza cercului dacă:

**a)** $BC = 5\sqrt{2}$ cm și $\sphericalangle BAC = 45°$; **b)** $BC = 10\sqrt{2}$ cm și $\sphericalangle CAB = 45°$.

**8** Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, se consideră punctele $M$, $N$ și $P$, astfel încât $\sphericalangle MNP = 45°$. Calculează lungimea coardei $MP$, știind că:

**a)** $r = 8$ cm; **b)** $r = 6$ cm; **c)** $r = 12$ cm.

**9** Pe cercul $\mathcal{C}(O, r = 3\text{ cm})$, se consideră punctele $E$, $F$ și $G$.

**a)** Dacă $EF = 3$ cm, calculează măsura unghiului $EGF$.

**b)** Dacă $\sphericalangle FGE = 30°$, calculează lungimea coardei $EF$.

**10** Vârfurile triunghiului $ABC$ se află pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$. Determină măsurile unghiurilor triunghiului, dacă:

**a)** $\sphericalangle OBC = 43°$ și $\sphericalangle OCA = 21°$; **b)** $\sphericalangle OAC = 25°$ și $\sphericalangle OBC = 33°$.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

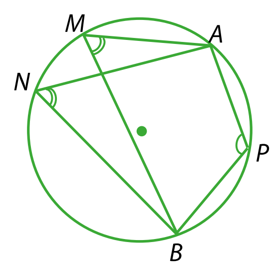
**1 Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

În figura alăturată, se știe că $\overset{\frown}{APB} = 120°$.

**a)** Măsura unghiului $AMB$ este egală cu 50°. **A** **F**

**b)** Măsura unghiului $ANB$ este egală cu 60°. **A** **F**

**c)** Măsura unghiului $APB$ este egală cu 120°. **A** **F**




**2 Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Pe un cerc, se consideră punctele $A$, $B$ și $C$, astfel încât punctele $A$ și $C$ sunt diametral opuse și $\overset{\frown}{AB} = 30°$.

| | |
|---|---|
| **a)** Măsura unghiului $ABC$ este egală cu … | **1)** 30°; |
| **b)** Măsura unghiului $BCA$ este egală cu … | **2)** 15°; |
| **c)** Măsura unghiului $CAB$ este egală cu … | **3)** 75°; |
| **d)** Măsura unghiului $AOB$ este egală cu … | **4)** 90°; |
| | **5)** 60°. |

**3 Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

Un triunghi $ABC$ are vârfurile pe un cerc cu centrul în punctul $O$. Dacă $\sphericalangle A = 35°$ și $\sphericalangle B = 45°$, atunci suma măsurilor unghiurilor $ACO$ și $BCO$ este egală cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 2 Coarde și arce în cerc. Proprietăți

## Ne amintim

- definiția și măsura unui unghi la centru;
- definiția și teoremele referitoare la mediatoarea unui segment.

## Rezolvăm împreună

### PROBLEMA 1

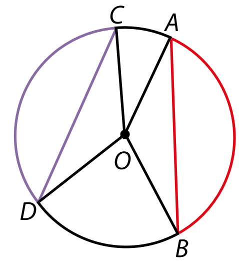


*Fig. 1*

Segmentele $AB$ și $CD$ sunt coarde ale unui cerc de centru $O$ (figura 1).
Demonstrează că:

**a)** dacă $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$, atunci $AB \equiv CD$; **b)** dacă $AB \equiv CD$, atunci $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$ și $\overset{\frown}{ACB} \equiv \overset{\frown}{CAD}$.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

**a)** Unghiurile $AOB$ și $COD$ sunt unghiuri la centru. Rezultă că $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = \sphericalangle COD$. Cum $OA = OC$ și $OB = OD$ (ca raze), rezultă că $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (criteriul de congruență LUL), de unde $AB \equiv CD$.

**b)** Deoarece $AB \equiv CD$ (din ipoteză) și $OA = OB = OC = OD$, rezultă că $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (criteriul de congruență LLL) și $\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD$. Cum unghiurile $AOB$ și $COD$ sunt unghiuri la centru, rezultă că $\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = \overset{\frown}{CD}$, de unde $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$. Din $\overset{\frown}{ACB} = 360° - \overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{CAD} = 360° - \overset{\frown}{CD}$ rezultă că $\overset{\frown}{ACB} \equiv \overset{\frown}{CAD}$.

Prin urmare, oricare ar fi un cerc, la arce congruente corespund coarde congruente și reciproc.

### PROBLEMA 2

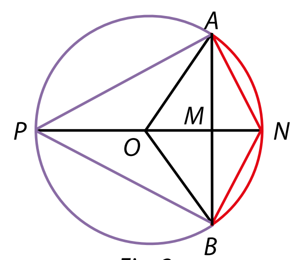


*Fig. 2*

Segmentul $AB$ este o coardă a unui cerc de centru $O$. Diametrul perpendicular pe coarda $AB$ intersectează coarda, arcul mic și arcul mare în punctele $M$, $N$ și $P$ (figura 2).
Demonstrează că:

**a)** $M$ este mijlocul coardei $AB$;
**b)** $N$ este mijlocul arcului mic $AB$;
**c)** $P$ este mijlocul arcului mare $AB$.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

**a)** Din $OM \perp AB$ rezultă că $\Delta AOM$ și $\Delta BOM$ sunt dreptunghice. Din $AO \equiv BO$ (ca raze) și $OM$ latură comună rezultă că $\Delta AOM \equiv \Delta BOM$ (criteriul CC) și $AM \equiv MB$.

**b)** Din $OM \perp AB$ rezultă că $\Delta AMN$ și $\Delta BMN$ sunt dreptunghice. Din $AM \equiv MB$ și $MN$ – latură comună rezultă că $\Delta AMN \equiv \Delta BMN$ (criteriul CC) și $AN \equiv NB$, de unde $\overset{\frown}{AN} \equiv \overset{\frown}{NB}$ (la coarde congruente corespund arce congruente).

**c)** Analog, $\Delta AMP \equiv \Delta BMP$ (criteriul CC) și $\overset{\frown}{AP} \equiv \overset{\frown}{BP}$.

Prin urmare, oricare ar fi un cerc, diametrul perpendicular pe coardă conține mijlocul coardei și mijloacele arcelor determinate de coardă.

### PROBLEMA 3

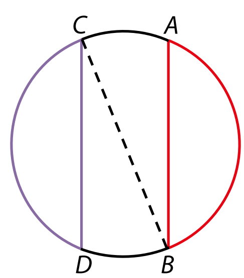


*Fig. 3*

Segmentele $AB$ și $CD$ sunt coarde ale unui cerc (figura 3). Demonstrează că:

**a)** dacă $AB \parallel CD$, atunci $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{BD}$; **b)** dacă $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{BD}$, atunci $AB \parallel CD$.

***Demonstrație*** *(activitate pe grupe):*

**a)** Deoarece $AB \parallel CD$ și $BC$ este secantă, rezultă că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCD$ (două drepte paralele determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente) și, fiind unghiuri înscrise în cerc, avem $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ și $\sphericalangle BCD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$. Cum $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle BCD$, rezultă că $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{BD}$.

**b)** Din congruența arcelor $AC$ și $BD$ rezultă congruența unghiurilor $ABC$ și $BCD$. Deoarece dreptele care determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente sunt paralele, rezultă că $AB \parallel CD$. Prin urmare, dacă două coarde ale unui cerc sunt paralele, atunci arcele cuprinse între ele sunt congruente și reciproc.

**Problema 4**

Segmentele $AB$ și $CD$ sunt două coarde ale unui cerc de centru $O$, punctul $M$ este piciorul perpendicularei din $O$ pe coarda $AB$ și punctul $N$ este piciorul perpendicularei din $O$ pe coarda $CD$ (figura 4). Demonstrează că:

**a)** dacă $OM \equiv ON$, atunci $AB \equiv CD$; **b)** dacă $AB \equiv CD$, atunci $OM \equiv ON$.

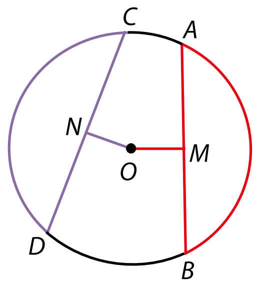


*Fig. 4*

***Demonstrație*** *(activitate individuală):*

Triunghiul $AOB$ fiind isoscel, cu $OA \equiv OB$, înălțimea $OM$ este și mediană. Rezultă că $AM = \frac{1}{2}AB$. Analog, se justifică egalitatea $CN = \frac{1}{2}CD$.

**a)** Deoarece $\Delta OMA \equiv \Delta ONC$ (criteriul IC), rezultă că $AM \equiv CN$ și, cum $AM = \frac{1}{2}AB$ și $CN = \frac{1}{2}CD$, rezultă că $AB \equiv CD$.

**b)** Cum $AB \equiv CD$, $AM = \frac{1}{2}AB$ și $CN = \frac{1}{2}CD$, rezultă că $\Delta OMA \equiv \Delta ONC$ (criteriul IC) și $OM \equiv ON$.

Prin urmare, dacă distanțele de la centrul unui cerc la două coarde ale acestuia sunt egale, atunci coardele sunt congruente și reciproc.

**Observație:** Demonstrațiile de mai sus pun în evidență proprietăți ale coardelor și ale arcelor unui cerc.

## Reține!

**Proprietăți ale coardelor și ale arcelor în cerc:**

- **Două arce congruente ale unui cerc au coardele corespunzătoare congruente.**
  Reciproc, **două coarde congruente ale unui cerc au arcele corespunzătoare congruente**.
- **Două coarde paralele ale unui cerc cuprind între ele arce congruente.**
  Reciproc, **două coarde ale unui cerc sunt paralele dacă cuprind între ele arce congruente.**
- **Diametrul perpendicular pe o coardă conține mijlocul coardei și mijloacele arcelor determinate de coardă.**
- **Două coarde ale unui cerc egal depărtate de centrul cercului sunt congruente.**
  Reciproc, **două coarde congruente ale unui cerc sunt egal depărtate de centrul cercului**.

## Aplicăm cunoștințele

Construim o coardă $AB$ a unui cerc de centru $O$ și notăm cu $C$ mijlocul unuia dintre arcele determinate de coarda $AB$. O coardă $CD$ intersectează coarda $AB$ în punctul $E$. Dacă punctul $E$ este mijlocul coardei $AB$, demonstrează că punctele $D$, $O$, $E$, $C$ sunt coliniare (figura 5).

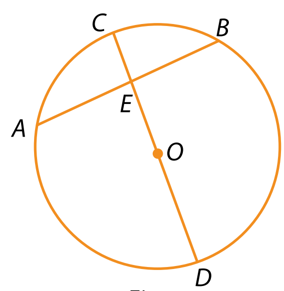


*Fig. 5*

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Din $\overset{\frown}{CA} \equiv \overset{\frown}{CB}$ rezultă că $CA \equiv CB$ (proprietăți ale coardelor și ale arcelor în cerc). Deoarece $E$ este mijlocul segmentului $AB$, rezultă că $EA \equiv EB$. Cum $OA$ și $OB$ sunt raze ale cercului, rezultă că $OA \equiv OB$. Egalitățile: $OA = OB$, $EA = EB$, $CA = CB$ arată că punctele $O$, $E$ și $C$ sunt egal depărtate de capetele segmentului $AB$, deci sunt puncte ale mediatoarei segmentului $AB$ și, ca urmare, sunt puncte coliniare. Dar punctul $E$ este pe dreapta $CD$, deci $E$, $C$, $D$ sunt coliniare. În consecință, punctele $D$, $O$, $E$ și $C$ sunt coliniare.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Într-un cerc cu centrul în punctul $O$ și raza $OA$, se notează cu $BC$ coarda perpendiculară pe raza $OA$ în mijlocul acesteia. Demonstrează că $OBAC$ este romb.

**2** Două coarde $AB$ și $PR$ ale unui cerc de centru $O$ sunt congruente. Diametrul $MN$ este perpendicular pe coarda $AB$ și măsura unghiului $POR$ este egală cu 64°. Determină măsurile arcelor mici $AM$, $AN$, $MB$ și $BN$.

**3** Fie un cerc cu centrul într-un punct $O$ și raza de 5 cm. O coardă $AB$ se află la distanța de 3 cm față de centrul cercului. Determină lungimea unei coarde $CD$, știind că arcele $AB$ și $CD$ sunt congruente.

**4** Punctele *A*, *B*, *C* și *D* sunt pe un cerc de centru *O* și rază 6 cm, iar coardele *AB* și *CD* sunt egal depărtate de centrul cercului. Dacă arcul *AB* are măsura de 60°, calculează lungimea coardei *CD* și distanța de la punctul *B* la *OA*.

**5** Pe un cerc de centru *O* și rază 10 cm, se consideră punctele *A*, *B* și *C*, astfel încât $AB \equiv BC$ și măsura arcului *AB* să fie egală cu 60°. Calculează aria triunghiului *OAC*.

**6** Pe un cerc cu centrul în *O*, se consideră punctele *A*, *B*, *C*, *D* și *M*, astfel încât dreptele *AB* și *CD* să fie paralele, iar punctele *C* și *M* să fie diametral opuse. Știind că $\sphericalangle AOC = 50°$ și $\sphericalangle OCD = 18°$, determină măsura arcului *BM*.

**7** Un arc *AB* al unui cerc are măsura de 20°. Se notează cu *C* și *D* punctele diametral opuse punctelor *A* și, respectiv, *B*.

**a)** Calculează măsurile arcelor mici *AD* și *BC*. **b)** Demonstrează că dreptele *AD* și *BC* sunt paralele.

**8** Punctele *A*, *B*, *C* și *D* aparțin unui cerc cu centrul în *O*, iar *ABCD* este trapez cu bazele *AB* și *CD*. Arată că:

**a)** $AD \equiv BC$; **b)** unghiurile *AOD* și *BOC* sunt congruente;

**c)** distanța de la punctul *O* la dreapta *AD* este egală cu distanța de la punctul *O* la dreapta *BC*.

**9** În figura 6, punctele *B*, *C*, *D*, *F*, *E* sunt pe un cerc, *ABCD* este trapez cu bazele *AB* și *CD*, $BE \parallel CF$, $DE \cap CF = \{P\}$ și $A \in DE$. Demonstrează că:

**a)** unghiurile *BCF* și *CDE* sunt congruente; **b)** $\sphericalangle PAB + \sphericalangle BCP = 180°$.

**10** În figura 7, cele două cercuri se intersectează în punctele *M* și *N*. O dreaptă $d_1$, care conține punctul *M*, intersectează cercurile în punctele *A* și *B*, iar o dreaptă $d_2$, care trece prin punctul *N*, intersectează cercurile în punctele *C* și *D*. Dacă dreptele $d_1$ și $d_2$ sunt paralele, demonstrează că *ABCD* este paralelogram.

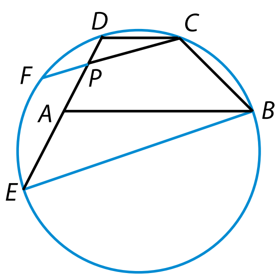


*Fig. 6*

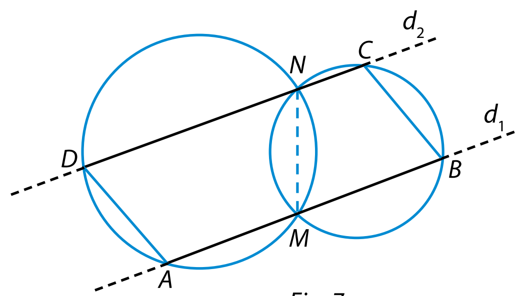


*Fig. 7*

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

Coardele *AB* și *CD*, de lungimi diferite, ale unui cerc de centru *O* sunt paralele. Dacă O este între cele două coarde, se notează cu *E* și *F* mijloacele coardelor *AB*, respectiv *CD* și cu *G* și *H*, mijloacele arcelor mici *AB* și, respectiv, *CD*.

**a)** Punctele *A*, *B*, *C* și *D* sunt vârfurile unui trapez. **A F**

**b)** Arcele cuprinse între coardele *AB* și *CD* sunt congruente. **A F**

**c)** Punctele *O*, *E* și *F* sunt coliniare. **A F**

**d)** Punctele *O*, *E*, *F*, *G* și *H* sunt coliniare. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Pe un cerc cu centrul în punctul *O*, se consideră punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E* și *F* în sensul invers rotirii acelor de ceas, astfel încât coardele *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* și *FA* să fie congruente. Dacă se notează cu *M* intersecția coardelor *CF* și *AE*, atunci:

**a)** *ABCD* este un … **1)** dreptunghi;

**b)** *ABDE* este un … **2)** pătrat;

**c)** *AOEF* este un … **3)** romb;

**d)** *BDEM* este un … **4)** trapez dreptunghic;

**5)** trapez isoscel.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

Măsura arcului *AB* al unui cerc este de 40°. Dacă *C* și *D* sunt punctele diametral opuse punctelor *A*, respectiv *B*, atunci suma măsurilor arcelor mici *AD* și *BC* este egală cu ☐.

# LECȚIA 3 Tangente dintr-un punct exterior la un cerc

## Ne amintim

- poziția unei drepte față de un cerc;
- orice dreaptă are cel mult două puncte comune cu un cerc.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

**1.** Construim un segment oarecare *AB* și două cercuri, unul cu centrul în *A* și altul cu centrul în *B*, având razele congruente. Cele două cercuri se intersectează în punctele *P* și *Q*. Să observăm că patrulaterul *APBQ* are laturile congruente, deoarece $AP = AQ = AB = BQ = BP$ (ca raze ale celor două cercuri), deci patrulaterul *APBQ* este romb și diagonalele lui se intersectează în punctul *M*, care este mijlocul fiecărei diagonale (figura 1). Rezultă că punctul *M* este mijlocul segmentului *AB*.

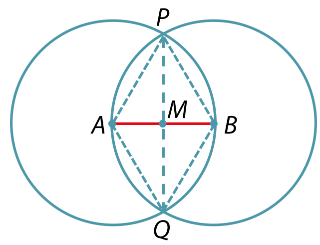


*Fig. 1*

Prin urmare, folosind rigla și compasul, putem construi mijlocul oricărui segment *AB*. Mijlocul unui segment *AB* poate fi construit și cu ajutorul unei rigle gradate (figura 2).

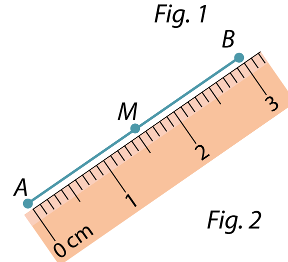


*Fig. 2*

**2.** Construim acum un cerc oarecare, cu centrul în punctul *O*, și un punct *P* exterior cercului. Prin unul dintre procedeele indicate la punctul anterior, construim mijlocul segmentului *OP*, pe care îl notăm cu *M*. Cercul cu centrul în punctul *M* și raza $OM = MP$ intersectează cercul dat în punctele *A* și *B*. Să observăm că unghiul *OAP* este înscris în cerc. Deoarece arcul *OBP* este un semicerc, rezultă că $\sphericalangle OAP = 90°$.

Prin urmare, distanța de la punctul *O* la dreapta *AP* este egală cu *OA*.

Rezultă că dreapta *AP* este tangentă la cercul cu centrul *O*. Analog, se arată că dreapta *BP* este tangentă la cercul cu centrul *O*. Din congruența triunghiurilor dreptunghice *OAP* și *OBP* rezultă că $AP \equiv BP$ (figura 3).

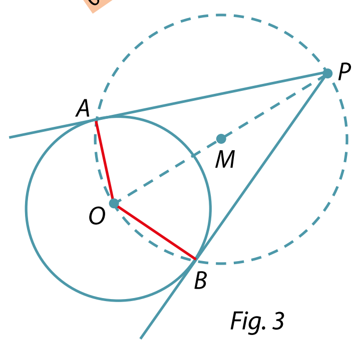


*Fig. 3*

### Reține!

**Proprietățile tangentelor dintr-un punct exterior la un cerc:**

- Prin orice punct dat exterior unui cerc, se pot construi două tangente la cercul respectiv.
- Segmentele determinate de punctul dat și punctele de tangență sunt congruente.

## Aplicăm cunoștințele

### Problema 1

Demonstrează următoarele teoreme:

**Teorema 1.** Orice punct de pe bisectoarea unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului.

**Teorema 2.** Orice punct egal depărtat de laturile unghiului este pe bisectoarea unghiului.

**Teorema 3.** Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente într-un punct *I* și laturile triunghiului sunt tangente la un cerc care are centrul în punctul *I*.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

**Teorema 1.** Construim un unghi cu vârful în punctul *O*, bisectoarea acestuia și un punct oarecare *P* pe bisectoare (figura 4). Din punctul *P* construim perpendicularele pe laturile unghiului și notăm cu *A* și *B* intersecțiile perpendicularelor cu laturile unghiului. Rezultă că distanțele de la punctul *P* la laturile unghiului sunt *PA* și *PB*. *Punctul P este egal depărtat de laturile unghiului dacă distanțele PA și PB sunt egale.* Aceasta rezultă din congruența triunghiurilor dreptunghice *OAP* și *OBP* (criteriul de congruență IU: *OP* – latură comună și $\sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOP$).

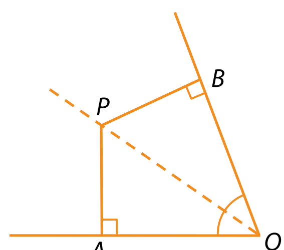


*Fig. 4*

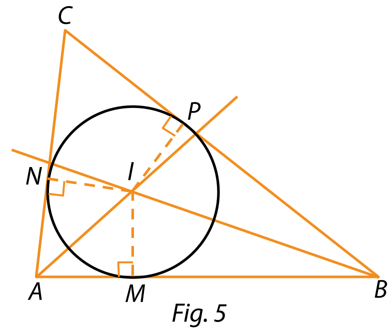


Fig. 5

**Teorema 2.** Din congruența triunghiurilor dreptunghice *OAP* și *OBP* (criteriul de congruență IC: *OP* – latură comună și $AP \equiv PB$) obținem teorema.

**Teorema 3.** Construim un triunghi oarecare *ABC* (figura 5). Bisectoarele unghiurilor *A* și *B* se intersectează în punctul *I*. Punctul *I* este pe bisectoarea unghiului *A*. Aplicând *teorema 1*, rezultă că punctul *I* este egal depărtat de laturile unghiului *A*, adică $IM \equiv IN$. Deoarece punctul *I* este și pe bisectoarea unghiului *B*, rezultă că *I* este egal depărtat de laturile unghiului *B*, adică $IM \equiv IP$. Din $IM \equiv IN$ și $IM \equiv IP$ rezultă că $IM = IN = IP$ sunt raze ale unui cerc cu centrul în *I*. Având în vedere că $IN = IP$, deducem, conform teoremei 2, că punctul *I* aparține și bisectoarei unghiului *C*. Prin urmare, cele trei bisectoare sunt concurente. Deoarece distanța de la punctul *I* la dreapta *AB* este egală cu raza cercului, rezultă că dreapta *AB* este tangentă la cerc. Analog, dreptele *BC* și *AC* sunt tangente la cerc.

**Observație:** În clasa a VI-a am învățat că acest cerc se numește cercul înscris în triunghiul *ABC*.

## PROBLEMA 2

Un triunghi *ABC* are lungimile laturilor $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm și $AC = 3$ cm. Cercul înscris în triunghi intersectează laturile *AB*, *BC* și *AC* în punctele *M*, *N* și *P*. Calculează lungimile segmentelor: *AM*, *AN*, *BM*, *BP*, *CN* și *CP*.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Folosim figura 8. Aplicând *proprietățile tangentelor dintr-un punct exterior la cerc*, rezultă congruențele $AM \equiv AN$, $BM \equiv BP$ și $CN \equiv CP$. Notând lungimile segmentelor $AM = x$, $BM = y$ și $CN = z$, rezultă lungimile laturilor triunghiului: $5 = x + y$, $6 = y + z$ și $3 = z + x$ (1). Perimetrul triunghiului *ABC* este $14 = 2x + 2y + 2z$, iar semiperimetrul este $7 = x + y + z$ (2). Scăzând pe rând din egalitatea (2) câte una dintre egalitățile (1), rezultă că $z = 2$, $x = 1$ și $y = 4$, de unde $AM = AN = 1$ cm, $BM = BP = 4$ cm și $CN = CP = 2$ cm.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Dintr-un punct *M* exterior unui cerc cu centrul în *O*, se duc tangentele la cerc, care intersectează cercul în punctele *A* și *B*. Știind că $\sphericalangle BMA = 52°$, calculează măsurile unghiurilor triunghiului *ABM* și ale triunghiului *ABO*.

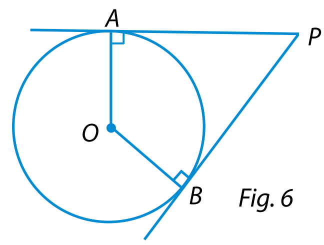


Fig. 6

**2** Tangentele dintr-un punct *P* exterior unui cerc cu centrul în *O* intersectează cercul în punctele *A* și *B*. Știind că cercul are raza de 4 cm și $\overset{\frown}{AB} = 120°$ (figura 6), calculează: **a)** măsura unghiului *APB*;
**b)** perimetrul și aria patrulaterului *AOBP*.

**3** Pe tangenta în punctul *A* al unui cerc de centru *O* și rază *r*, se ia un punct *B*, astfel încât $AB = r$. Din punctul *B* se duce cealaltă tangentă la cerc și se notează cu *C* punctul de tangență.
**a)** Demonstrează că $\sphericalangle ABC = 90°$.  **b)** Calculează perimetrul și aria patrulaterului *ABCO*.

**4** În figura 7, cele două cercuri sunt concentrice, iar *MA*, *MB*, *MC* și *MD* sunt tangente cercurilor. Demonstrează că $\sphericalangle AMC \equiv \sphericalangle BMD$.

**5** În figura 8, punctul *M* este exterior cercului cu centrul *O* și *AM* este o tangentă din punctul *M* la cerc.
**a)** Știind că $OM = 13$ cm și $AM = 12$ cm, calculează raza cercului.
**b)** Știind că raza cercului este egală cu 7 cm și $OM = 25$ cm, calculează *AM*.
**c)** Știind că $AM = 28$ cm și raza cercului este egală cu 21 cm, calculează *OM*.

**6** În figura 9, dreapta *AB* este tangentă la cerc în punctul *B*, iar segmentul *BC* este coardă. Demonstrează că $\sphericalangle ABC = \dfrac{\overset{\frown}{BDC}}{2}$.

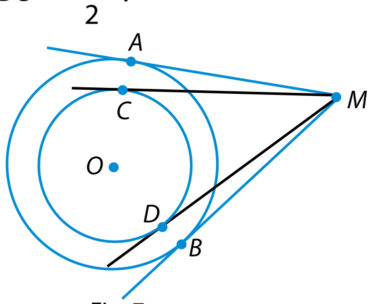


Fig. 7

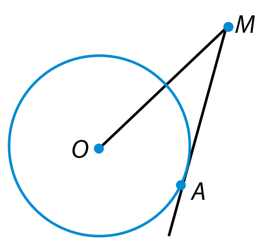


Fig. 8

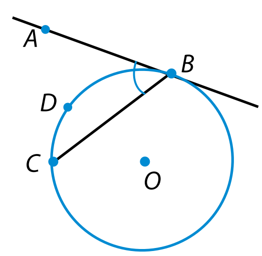


Fig. 9

**7** În figura 10, dreptele $MA$, $MB$ și $NC$ sunt tangente la cercul cu centrul în $O$, iar punctele $A$ și $C$ sunt puncte diametral opuse. Calculează măsura unghiului $MON$.

**8** În figura 11, $ABCD$ este un patrulater, iar laturile sale sunt tangente unui cerc în punctele $M$, $N$, $P$ și $Q$.

**a)** Demonstrează că $AB + CD = AD + BC$.

**b)** Dacă $AD = BC = 6$ cm și $AB = 8$ cm, calculează perimetrul patrulaterului $ABCD$.

**9** În figura 12, se știe că $EA$, $EB$ și $CD$ sunt tangente cercului de centru $O$. Dacă lungimea segmentului $AE$ este egală cu 6 cm, calculează perimetrul triunghiului $CED$.

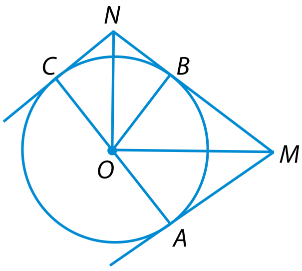


*Fig. 10*

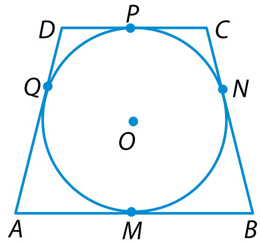


*Fig. 11*

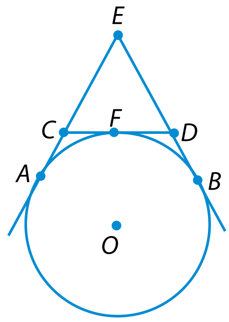


*Fig. 12*

**10** Cercurile $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$ sunt cercuri tangente exterioare în punctul $T$ și dreapta $d$ este tangentă celor două cercuri în punctele $M$, respectiv $N$. Demonstrează că triunghiul $MTN$ este dreptunghic.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

Triunghiul $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, are $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm. Se notează cu $D$ simetricul punctului $A$ față de dreapta $BC$. Dacă $\mathscr{C}_1$ este cercul cu centrul în $B$ și raza de 3 cm și $\mathscr{C}_2$ este cercul cu centrul în $C$ și raza de 4 cm, atunci:

**a)** $CA$ și $CD$ sunt tangente la cercul $\mathscr{C}_1$; **A** **F**

**b)** $BA$ și $BD$ sunt tangente la cercul $\mathscr{C}_2$; **A** **F**

**c)** diagonalele patrulaterului cu vârfurile în punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ au același mijloc; **A** **F**

**d)** diagonalele patrulaterului $ABDC$ sunt perpendiculare. **A** **F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Se consideră un cerc $\mathscr{C}_1(A, r_1 = 3 \text{ cm})$ și un segment $AB = 5$ cm. Tangentele din punctul $B$ la cerc îl intersectează pe acesta în punctele $C$ și $D$. Se notează cu $O$ mijlocul segmentului $AC$ și se desenează cercul $\mathscr{C}_2(O, r_2 = 1{,}5 \text{ cm})$, care intersectează segmentul $AB$ în punctul $E$. Pe arcul mic $AE$ se consideră un punct $F$, astfel încât $BF$ să fie tangentă la cerc. Atunci:

| | |
|---|---|
| **a)** $\frac{1}{2}BD = \ldots$ | **1)** 1,8 cm; |
| **b)** $\frac{1}{4}BF = \ldots$ | **2)** 2 cm; |
| **c)** $CE = \ldots$ | **3)** 1 cm; |
| **d)** $AE = \ldots$ | **4)** 2,4 cm; |
| | **5)** 4,5 cm. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

Pe cercul de centru $O$ și rază $r$, se consideră un punct $A$. Pe tangenta în punctul $A$ la cerc, se ia un punct $B$, astfel încât $AB = 2r$ și se notează cu $M$ mijlocul segmentului $AB$. Din punctul $M$ se duce o altă tangentă la cerc și se notează cu $N$ punctul de tangență. Dreapta $BN$ intersectează a doua oară cercul în punctul $C$. Dacă $BC = 4\sqrt{2}$ cm, atunci $r = \boxed{\phantom{000}}$ cm.

# LECȚIA 4 Poligoane regulate înscrise într-un cerc

## Ne amintim

- definiția și măsura unui unghi la centru;
- definiția și măsura unui unghi înscris;
- definiția mediatoarei unui segment și proprietățile ei.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Pe un cerc de centru $O$ desenăm cinci puncte, $A$, $B$, $C$, $D$ și $E$, astfel încât oricare două dintre segmentele $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ și $EA$ au cel mult un punct comun (figura 1). Despre reuniunea celor cinci segmente se spune că este *pentagonul ABCDE înscris în cercul de centru O*. Punctele $A$, $B$, $C$, $D$ și $E$ sunt *vârfurile pentagonului*, segmentele $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ și $EA$ sunt *laturile pentagonului*, iar $\sphericalangle EAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDE$ și $\sphericalangle DEA$ sunt *unghiurile pentagonului*.

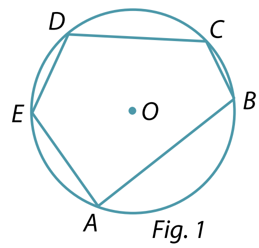


*Fig. 1*

În general, dacă punctele $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_{n-1}$, $A_n$ sunt puncte pe un cerc, astfel încât oricare două dintre segmentele $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_4$, ..., $A_{n-1}A_n$, $A_nA_1$ au cel mult un punct comun, despre reuniunea segmentelor se spune că este poligonul $A_1A_2A_3...A_n$ înscris în cercul de centru $O$.

Un poligon este denumit după numărul vârfurilor: triunghi (are trei vârfuri), patrulater (are patru vârfuri), pentagon (are cinci vârfuri), hexagon (are șase vârfuri), octogon (are opt vârfuri). Dacă unghiurile și laturile unui poligon sunt congruente, atunci poligonul este **un poligon regulat**.

## Rezolvăm împreună

În figura 2, unghiurile din jurul punctului $O$ sunt congruente. Un cerc cu centrul în punctul $O$ intersectează laturile unghiurilor în punctele $A$, $B$, $C$, $D$ și $E$, care sunt vârfurile pentagonului $ABCDE$ înscris în cercul de centru $O$. Notând cu $n$ numărul laturilor pentagonului, atunci:

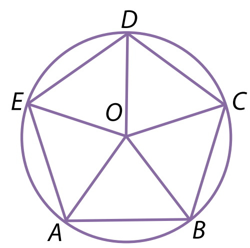


*Fig. 2*

**a)** arată că $ABCDE$ este pentagon regulat;
**b)** exprimă în funcție de $n$ măsurile unghiurilor pentagonului;
**c)** exprimă în funcție de $n$ suma măsurilor unghiurilor pentagonului;
**d)** arată că centrul cercului este intersecția mediatoarelor laturilor pentagonului;
**e)** arată că centrul cercului este intersecția bisectoarelor unghiurilor pentagonului.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

**a)** Deoarece cele cinci unghiuri, $AOB$, $BOC$, $COD$, $DOE$ și $EOA$, sunt unghiuri congruente în jurul punctului $O$ și suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este egală cu 360°, rezultă că fiecare unghi are măsura egală cu $\frac{360°}{5}=72°$. Cum cele cinci unghiuri sunt și unghiuri la centru, rezultă că arcele mici $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ și $EA$ au măsurile egale cu 72°, adică $\overset{\frown}{AB}\equiv\overset{\frown}{BC}\equiv\overset{\frown}{CD}\equiv\overset{\frown}{DE}\equiv\overset{\frown}{EA}$. Deoarece la arce congruente corespund coarde congruente, rezultă că $AB\equiv BC\equiv CD\equiv DE\equiv EA$. Prin urmare, laturile pentagonului $ABCDE$ sunt congruente.

Observăm că orice unghi al pentagonului este unghi înscris în cerc și măsura arcului cuprins între laturile sale este egală cu suma măsurilor a trei arce mici. De exemplu, măsura arcului cuprins între laturile unghiului $ABC$ este egală cu $\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{EA}=3\cdot 72°$. Rezultă că $\sphericalangle ABC=\frac{3\cdot 72°}{2}=108°$. Prin urmare, orice unghi al pentagonului are măsura egală cu 108° și unghiurile pentagonului $ABCDE$ sunt congruente. Având unghiurile și laturile congruente, pentagonul este pentagon regulat.

**b)** Conform punctului a), rezultă că arcele mici $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ și $EA$ ale pentagonului regulat $ABCDE$ au măsura egală cu $\frac{360°}{n}$, unde $n$ este numărul laturilor pentagonului ($n$ = 5). De asemenea, rezultă că unghiurile pentagonului regulat au măsura egală cu $(n-2)\cdot\dfrac{360°}{2n}=\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}=\dfrac{3\cdot 180°}{5}=108°$.

**c)** Conform punctului b), suma măsurilor celor $n$ unghiuri ale pentagonului regulat este egală cu:

$$n\cdot\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}=(n-2)\cdot 180° = (5-2)\cdot 180° = 540°.$$

**d)** Considerăm o latură a pentagonului regulat $ABCDE$, de exemplu, latura $AB$ (figura 3). Deoarece $OA = OB$, ca raze ale cercului, rezultă că $O$ este pe mediatoarea segmentului $AB$. Prin urmare, punctul $O$ se află pe mediatoarea fiecărei laturi a pentagonului regulat, adică punctul $O$ este intersecția mediatoarelor laturilor pentagonului regulat. Rezultă că centrul cercului este intersecția mediatoarelor laturilor pentagonului regulat.

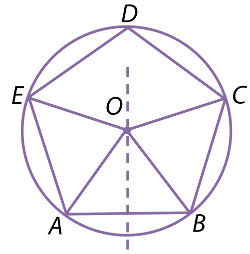


*Fig. 3*

**e)** Considerăm un unghi oarecare al pentagonului, de exemplu, unghiul $ABC$ (figura 4). Deoarece $BA = BC$ (laturi congruente ale pentagonului), rezultă că punctul $B$ se află pe mediatoarea segmentului $AC$. Deoarece $OA = OC$ (raze ale cercului), rezultă că punctul $O$ se află pe mediatoarea segmentului $AC$. Cum $B$ și $O$ sunt două puncte ale mediatoarei segmentului $AC$, rezultă că $BO$ este mediatoarea segmentului $AC$. Deoarece triunghiul $ABC$ este isoscel ($BA = BC$), rezultă că mediatoarea $BO$ este bisectoarea unghiului $ABC$, adică punctul $O$ se află pe bisectoarea unghiului. Prin urmare, punctul $O$ se află pe bisectoarea fiecărui unghi al pentagonului regulat, adică centrul cercului este intersecția bisectoarelor unghiurilor pentagonului regulat.

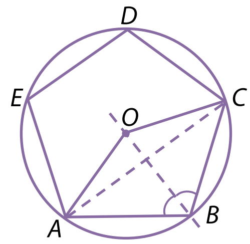


*Fig. 4*

**Observații:**

**1.** Se poate demonstra că, dacă un poligon $A_1A_2A_3...A_n$ ($n \geq 3$) este poligon regulat, atunci vârfurile poligonului sunt pe un cerc de centru $O$, adică poligonul este înscris într-un cerc.

**2.** Pentru un poligon regulat cu $n$ laturi $A_1A_2A_3...A_n$, înscris într-un cerc de centru $O$, folosind procedeele de la problema precedentă, putem calcula măsura unghiurilor poligonului și suma măsurilor lor. De asemenea, putem demonstra proprietatea mediatoarelor laturilor și a bisectoarelor unghiurilor poligonului.

## Reține!

- **Definiții:**
  Un poligon se numește **poligon înscris în cerc** dacă vârfurile poligonului aparţin unui cerc.
  Despre cerc se spune că este cercul **circumscris poligonului**, iar centrul cercului este numit **centrul poligonului**.
- Un poligon se numește **poligon regulat** dacă are laturile congruente și unghiurile congruente.
- **Proprietățile poligonului regulat:**
  - Orice poligon regulat este poligon înscris într-un cerc.
  - Vârfurile unui poligon regulat cu $n$ laturi înscris în cerc determină pe cerc $n$ arce congruente.
  - Dacă vârfurile unui poligon înscris într-un cerc determină $n$ arce congruente, atunci poligonul este regulat și are $n$ laturi.
  - Măsura unui arc mic de cerc determinat de o latură a poligonului regulat cu $n$ laturi înscris într-un cerc este egală cu $\dfrac{360°}{n}$.
  - Măsura unui unghi al unui poligon regulat cu $n$ laturi înscris într-un cerc este egală cu $\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.
  - Suma măsurilor unghiurilor unui poligon regulat cu $n$ laturi înscris într-un cerc este egală cu $(n-2)\cdot 180°$.
  - Centrul cercului în care este înscris un poligon regulat coincide cu punctul de intersecție a mediatoarelor laturilor poligonului.
  - Centrul cercului în care este înscris un poligon regulat coincide cu punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor poligonului.

## Aplicăm cunoștințele

### PROBLEMA 1

**a)** Justifică următoarea afirmație: *Un triunghi echilateral ABC este un poligon regulat.*

**b)** Descrie o metodă prin care construiești cercul care trece prin vârfurile acestui triunghi.

***Demonstrație*** *(activitate individuală):*

**a)** Triunghiul $ABC$, fiind echilateral, are unghiurile și laturile congruente, deci este poligon regulat cu trei laturi (figura 5).

**b)** Construim centrul cercului, pe care îl notăm cu $O$. Acesta se obține fie ca intersecție a mediatoarelor a două laturi, fie ca intersecție a bisectoarelor a două unghiuri. Cercul cu centrul în $O$ și raza $OA$ este cercul căutat (figura 5).

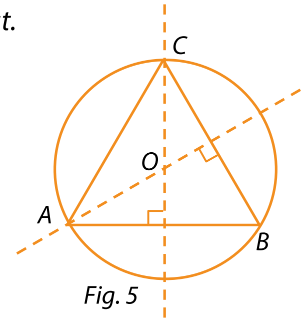


*Fig. 5*

### PROBLEMA 2

**a)** Justifică următoarea afirmație: *Un pătrat ABCD este un poligon regulat.*

**b)** Descrie o metodă prin care poți construi cercul care trece prin vârfurile acestui pătrat.

***Demonstrație*** *(activitate individuală):*

**a)** Pătratul $ABCD$ are unghiurile și laturile congruente, deci este poligon regulat cu patru laturi (figura 6).

**b)** Intersecția diagonalelor pătratului, pe care o notăm cu $O$, este centrul cercului căutat, raza cercului fiind $OA = OB = OC = OD$ (diagonalele unui pătrat se intersectează într-un punct, care este mijlocul fiecărei diagonale).

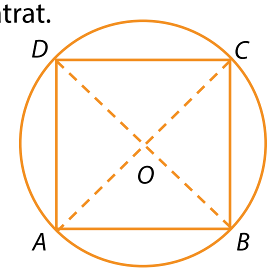


*Fig. 6*

### PROBLEMA 3

**a)** Arată că, dacă $ABCDEF$ este un hexagon regulat înscris în cercul de centru $O$, atunci punctul $O$ determină cu oricare două vârfuri consecutive ale poligonului un triunghi echilateral.

**b)** Arată că $AD$ este un diametru al cercului de centru $O$.

**c)** Determină o modalitate de construcție a unui hexagon regulat înscris în cerc.

**d)** Determină o modalitate de construcție a unui triunghi echilateral înscris în cerc.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

**a)** Deoarece $ABCDEF$ este un hexagon regulat înscris în cercul de centru $O$ (figura 7), laturile hexagonului sunt congruente. Dar laturile hexagonului sunt 6 coarde ale cercului, cărora le corespund arcele mici $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$ și $FA$, care sunt congruente, iar $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ (la arce congruente corespund coarde congruente). Prin urmare, $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$. Deoarece $OA = OB$ (ca raze ale cercului), triunghiul $OAB$ este isoscel și, cum are un unghi de $60^\circ$, acesta este echilateral. Prin urmare, centrul $O$ al cercului în care este înscris hexagonul regulat $ABCDEF$ determină cu oricare două vârfuri consecutive ale hexagonului regulat un triunghi echilateral.

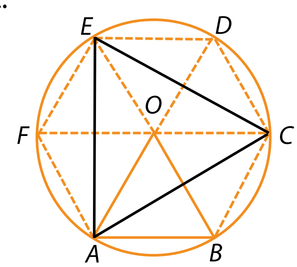


*Fig. 7*

**b)** Cum $\sphericalangle AOD = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, rezultă că punctele $A$ și $D$ sunt diametral opuse, adică $AD$ este diametru.

**c)** O modalitate:
- desenăm un cerc și o rază;
- trasăm unghiuri la centru adiacente, cu măsura de $360^\circ : 6 = 60^\circ$;
- unim succesiv cele 6 puncte de pe cerc.

Altă modalitate:
- desenăm un cerc și un diametru;
- cu aceeași deschidere a compasului, fixăm acul compasului în:
  - unul dintre capetele diametrului și trasăm un arc de cerc, care intersectează cercul în două puncte;
  - celălalt capăt al diametrului și trasăm un arc de cerc, care intersectează cercul în două puncte;
- unim punctele obținute pe cerc.

**d)** Unim din 2 în 2 vârfurile unui hexagon regulat.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Determină măsurile unghiurilor unui poligon regulat cu:
**a)** 6 laturi; **b)** 8 laturi; **c)** 10 laturi.

**2** Calculează suma măsurilor unghiurilor unui poligon regulat cu:
**a)** 6 laturi; **b)** 8 laturi; **c)** 10 laturi.

**3** Determină numărul de laturi ale unui poligon regulat cu măsura fiecărui unghi de:
**a)** 120°; **b)** 135°; **c)** 144°.

**4** Determină numărul de laturi ale unui poligon regulat care are suma măsurilor unghiurilor egală cu:
**a)** 1440°; **b)** 2160°; **c)** 2520°.

**5** Luca a construit poligonul regulat $A_1A_2...A_n$. Determină cât este $n$, știind că arcul mic $A_1A_6$ are măsura egală cu:
**a)** 100°; **b)** 150°; **c)** 225°.

**6** Alexandra a construit poligonul regulat $A_1A_2...A_n$. Determină cât este $n$, știind că unghiul $OA_1A_2$ are măsura egală cu:
**a)** 78°; **b)** 75°; **c)** 81°.

**7** Precizează numărul de diagonale ale unui poligon regulat cu:
**a)** 6 laturi; **b)** 10 laturi; **c)** $n$ laturi.

**8** Calculează numărul de laturi ale unui poligon regulat care are:
**a)** 27 de diagonale; **b)** 54 de diagonale; **c)** 170 de diagonale.

**9** Construiește un dreptunghi $MNPQ$, cu $MN = 4$ cm și $\sphericalangle MNQ = 60°$.
**a)** Demonstrează că există un cerc pe care se află vârfurile dreptunghiului.
**b)** Mediatoarea laturii $MQ$ intersectează cercul construit la subpunctul a) în punctele $R$ și $S$. Demonstrează că punctele $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$, $S$ sunt vârfurile unui hexagon regulat.

**10** Pe laturile unui dreptunghi, se construiesc în exterior pătrate.
**a)** Demonstrează că centrele acestor pătrate sunt vârfurile unui poligon regulat.
**b)** Calculează raza cercului circumscris acestui poligon, știind că două dintre laturile consecutive ale dreptunghiului au lungimile egale cu $a$ cm, respectiv $b$ cm.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1 Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

| | | |
|---|---|---|
| **a)** Un patrulater cu toate laturile congruente este poligon regulat. | A | F |
| **b)** Un patrulater cu toate unghiurile congruente este poligon regulat. | A | F |
| **c)** Toate diagonalele unui pentagon regulat sunt congruente. | A | F |
| **d)** Măsura unui unghi al unui poligon regulat cu 10 laturi este egală cu 144°. | A | F |

**2 Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Se consideră triunghiurile echilaterale $ABC$, $ACD$, $ADE$, $AEF$ și $AFG$, având interioarele disjuncte două câte două. Dacă punctele $M$, respectiv $N$ sunt mijloacele laturilor $AB$, respectiv $AE$, atunci poligonul:

| | |
|---|---|
| **a)** $ACBG$ este un … | **1)** poligon regulat; |
| **b)** $BCFG$ este un … | **2)** romb; |
| **c)** $CDNM$ este un … | **3)** dreptunghi; |
| **d)** $BDF$ este un … | **4)** pătrat; |
| | **5)** trapez isoscel. |

**3 Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

Un triunghi isoscel $MNP$, cu $MN \equiv MP$, are măsura unghiului $NMP$ egală cu 20°. Dacă $NP$ este latura unui poligon regulat înscris în cercul circumscris triunghiului $MNP$, atunci numărul laturilor acestui poligon este egal cu $\boxed{\phantom{000}}$.

# LECȚIA 5 Lungimea cercului și aria discului

## Ne amintim

- definiția și măsura unui unghi la centru;
- mărimi direct proporționale și regula de trei simplă.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

**Ce este lungimea unui cerc și cum calculăm lungimea cercului?**

Definiția riguroasă a lungimii unui cerc necesită cunoștințe pe care nu le aveți încă. Mai puțin riguros, dar pe înțelesul vostru, lungimea unui cerc este lungimea unui fir cu care putem înconjura cercul. Primul care a tratat în mod științific problema aflării lungimii unui cerc a fost **Arhimede**, un matematician grec din Antichitate. Noi vom încerca să estimăm lungimea cercului folosind cunoștințele de până acum.

Dacă desenăm unghiuri la centru într-un cerc, constatăm că lungimile coardelor și ale arcelor determinate de laturile fiecărui unghi sunt cu atât mai mici, cu cât unghiul la centru este mai mic. De exemplu, deoarece $\sphericalangle AOB < \sphericalangle COD$, rezultă că $AB < CD$ și $\widehat{AB} < \widehat{CD}$ (figura 1). Constatăm că, dacă unghiul la centru $AOB$ este mic, lungimea arcului $AB$ este aproximativ egală cu lungimea coardei $AB$, adică $\widehat{AB} \approx AB$. Aproximarea este cu atât mai bună, cu cât unghiul la centru este mai mic, adică cu cât numărul laturilor poligonului este mai mare. De aceea, vom admite că lungimea unui cerc este perimetrul unui poligon regulat cu $n$ laturi înscris în cerc, atunci când $n$ este suficient de mare, și vom analiza două cazuri: $n = 36$ și $n = 72$.

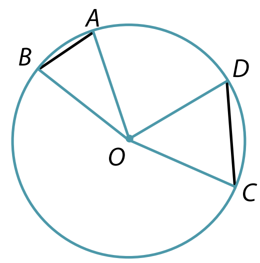


*Fig. 1*

**Cazul $n = 36$.** Dacă considerăm un poligon regulat cu 36 de laturi, atunci măsura fiecărui arc mic determinat de laturi este egală cu $\frac{360°}{36} = 10°$ și este măsura unui unghi la centru determinat de centrul cercului și extremitățile unei laturi. Construim un cerc cu centrul într-un punct $O$ și raza $r = OA = 10$ cm. Dacă $AB$ este o latură a unui poligon regulat cu 36 de laturi înscris în acest cerc, atunci $\sphericalangle AOB = \widehat{AB} = 10°$.

Construim apoi unghiul $AOB$ la centru, cu măsura de 10° (figura 2), și observăm că arcul $AB$ *aproape* se identifică cu coarda $AB$. Altfel spus, lungimea arcului $AB$ este aproximativ egală cu lungimea coardei $AB$, adică $\widehat{AB} \approx AB$. Măsurând lungimea coardei $AB$, găsim $AB = 1{,}7$ cm.

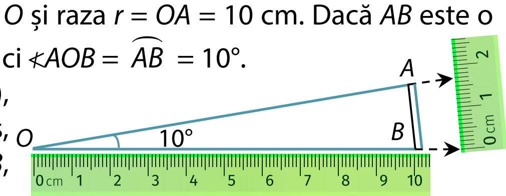


*Fig. 2*

Rezultă că $\widehat{AB} \approx 1{,}7$ cm. Notând cu $\mathcal{L}_{cerc}$ lungimea cercului, rezultă că $\mathcal{L}_{cerc} = 36 \cdot \widehat{AB} \approx 36 \cdot 1{,}7 \approx 61{,}2$ (cm).

Calculăm acum raportul dintre lungimea cercului și lungimea diametrului cercului: $\frac{\mathcal{L}_{cerc}}{2 \cdot r} \approx \frac{61{,}2}{2 \cdot 10} = 3{,}06$.

**Cazul $n = 72$.** Repetăm construcția pentru un poligon regulat cu 72 de laturi. În acest caz, datele construcției sunt următoarele: $r = OA = 19{,}5$ cm, $\sphericalangle AOB = \widehat{AB} = 5°$. Măsurând lungimea coardei $AB$, găsim $AB = 1{,}7$ cm și rezultă: $\widehat{AB} \approx 1{,}7$ cm; $\mathcal{L}_{cerc} = 72 \cdot \widehat{AB} \approx 72 \cdot 1{,}7 \approx 122{,}4$; $\frac{\mathcal{L}_{cerc}}{2 \cdot r} \approx \frac{122{,}4}{2 \cdot 19{,}5} = 3{,}13$.

*Deoarece* 72 *este mai mare decât* 36, *aproximarea raportului* $\frac{\mathcal{L}_{cerc}}{2 \cdot r}$ *cu numărul* 3,13 *este mai bună decât aproximarea raportului* $\frac{\mathcal{L}_{cerc}}{2 \cdot r}$ *cu numărul* 3,06. Deci, cu cât numărul laturilor poligonului înscris este mai mare, cu atât aproximarea raportului $\frac{\mathcal{L}_{cerc}}{2 \cdot r}$ este mai bună.

Cu metode avansate, s-a demonstrat că valoarea raportului $\frac{\mathcal{L}_{cerc}}{2 \cdot r}$ este aceeași pentru toate cercurile. Acest raport se notează cu π (litera grecească „pi"). Tot cu metode avansate, se poate arăta că π este număr irațional și că $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 9\ldots$ . Prin urmare, $\mathcal{L}_{cerc} = 2\pi r$.

În figura 3, este reprezentat un cerc de centru $O$ și rază $r$.

În figura 4, este reprezentat un disc, adică cercul și punctele interioare cercului.

Prin urmare, discul este o suprafață plană deteminată de un cerc și de punctele interioare cercului. Mărimea acestei suprafețe se exprimă printr-un număr numit aria discului sau, în mod uzual, aria cercului.

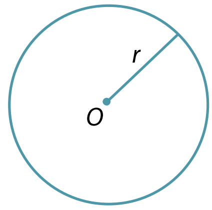


*Fig. 3*

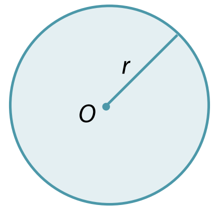


*Fig. 4*

## Reține!

- Formula de calcul pentru lungimea unui cerc în funcție de raza $r$ a acestuia este: $\mathcal{L}_{cerc} = 2\pi r$.
- Formula de calcul pentru aria unui disc în funcție de raza $r$ a acestuia este: $\mathcal{A}_{cerc} = \pi r^2$.

$\pi \approx 3,14$ (cu două zecimale exacte)

## Aplicăm cunoștințele

### Problema 1

Dacă $A$ și $B$ sunt două puncte ale unui cerc, calculează lungimea arcului $AB$, știind că măsura arcului de cerc este egală cu $\alpha°$ (figura 5).

***Rezolvare*** *(activitate pe grupe):*

Lungimea unui arc de cerc, exprimată într-o unitate de măsură pentru lungimi, și măsura arcului de cerc, exprimată în grade, pot fi considerate *mărimi direct proporționale*. Prin urmare, dacă $\overset{\frown}{AB} = \alpha°$, notăm cu $\mathcal{L}_{\overset{\frown}{AB}}$ lungimea arcului de cerc $AB$ și *aplicăm regula de trei simplă*:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_{cerc} \ldots\ldots\ldots\ldots 360° \\ \mathcal{L}_{\overset{\frown}{AB}} \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha° \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\alpha° \cdot \mathcal{L}_{cerc}}{360°} = \frac{\pi r \alpha°}{180°}.$$

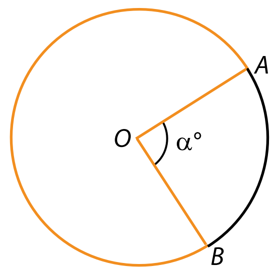


*Fig. 5*

### Problema 2

Dacă $A$ și $B$ sunt două puncte ale unui cerc de centru $O$, suprafața mărginită de razele $OA$, $OB$ și arcul de cerc $AB$ se numește *sector de cerc* (figura 6). Calculează aria sectorului de cerc, știind că măsura arcului $AB$ este egală cu $\alpha°$.

***Rezolvare*** *(activitate pe grupe):*

Aria unui sector de cerc, exprimată într-o unitate de măsură pentru suprafețe, și măsura arcului de cerc, exprimată în grade, pot fi considerate *mărimi direct proporționale*. Prin urmare, dacă $\overset{\frown}{AB} = \alpha°$, notăm cu $\mathcal{A}_{sector}$ aria sectorului și aplicăm *regula de trei simplă*:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_{cerc} \ldots\ldots\ldots\ldots 360° \\ \mathcal{A}_{sector} \ldots\ldots\ldots\ldots \alpha° \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{A}_{sector} = \frac{\alpha° \cdot \mathcal{A}_{cerc}}{360°} = \frac{\pi r^2 \alpha°}{360°}.$$

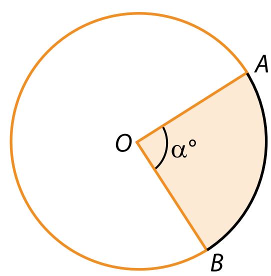


*Fig. 6*

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Calculează lungimea unui cerc de rază $r$, dacă:
**a)** $r = 2,5$ cm; **b)** $r = 4$ cm; **c)** $r = 10$ cm; **d)** $r = 0,5$ cm.

**2** Determină raza cercului care are lungimea egală cu:
**a)** $10\pi$ cm; **b)** $7\pi$ cm; **c)** $12\pi$ cm; **d)** $36\pi$ cm.

**3** Aproximează prin adaos la sutimi raza unui cerc, știind că lungimea cercului este egală cu:
**a)** 14 cm; **b)** 17 cm; **c)** 23 cm; **d)** 34 cm.

**4** Calculează aria unui disc de rază $r$, dacă:
**a)** $r = 3$ cm; **b)** $r = 7$ cm; **c)** $r = 1,2$ cm; **d)** $r = 10$ cm.

**5** Determină raza unui disc, știind că acesta are aria egală cu:
**a)** $25\pi$ cm$^2$; **b)** $3,24\pi$ cm$^2$; **c)** $144\pi$ cm$^2$; **d)** $196\pi$ cm$^2$.

**6** Punctele $A$ și $B$ aparțin unui cerc de centru $O$ și raza de 12 cm. Calculează lungimea arcului mic $AB$, știind că:
**a)** $\sphericalangle AOB = 45°$; **b)** $\sphericalangle AOB = 60°$; **c)** $\sphericalangle AOB = 90°$; **d)** $\sphericalangle AOB = 30°$.

**7** Punctele $M$ și $N$ aparțin unui cerc de centru $O$ și raza de 6 cm. Calculează aria sectorului de cerc $MON$, știind că măsura arcului $MN$ este egală cu:
**a)** 60°; **b)** 30°; **c)** 45°; **d)** 90°.

**8** Calculează aria discului mărginit de cercul care are lungimea egală cu:
**a)** $12\pi$ cm; **b)** $18\pi$ cm; **c)** $24\pi$ cm; **d)** $32\pi$ cm.

**9** Calculează lungimea cercului care mărginește un disc cu aria egală cu:
**a)** $64\pi$ cm²; **b)** $100\pi$ cm²; **c)** $144\pi$ cm²; **d)** $225\pi$ cm².

**10** În figura 7, $MNPQ$ este un pătrat cu latura de 6 cm, iar arcul $MP$ aparține cercului cu centrul în $N$ și raza $NM$.
**a)** Determină aria regiunii hașurate.
**b)** Estimează aria regiunii hașurate, folosind $\pi = 3{,}14$.

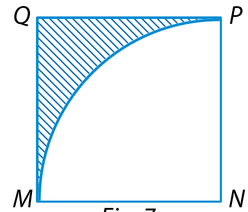


*Fig. 7*

**11** Determină lungimea unui arc de cerc cu măsura de 120°, știind că:
**a)** raza cercului este 6 cm; **b)** lungimea cercului este egală cu $24\pi$ cm;
**c)** aria discului este egală cu $1{,}44\pi$ cm².

**12** Pătratul $ABCD$ este înscris în cercul cu centrul în $O$ și raza de 4 cm (figura 8).
**a)** Calculează aria regiunii hașurate.
**b)** Estimează aria regiunii hașurate, folosind $\pi = 3{,}14$.

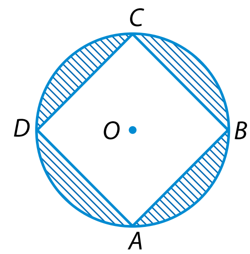


*Fig. 8*

**13** Determină aria unui sector de cerc cu unghiul la centru de 30°, știind că:
**a)** raza cercului este egală cu 18 cm;
**b)** lungimea cercului este egală cu $4\sqrt{3}\pi$ cm;
**c)** aria discului este egală cu $3{,}92\pi$ cm².

**14** În figura 9, triunghiul echilateral $ABC$ este înscris în cercul cu centrul $O$ și raza de 12 cm.
**a)** Calculează aria regiunii hașurate.
**b)** Estimează aria regiunii hașurate, folosind $\pi = 3{,}14$ și $\sqrt{3} = 1{,}73$.

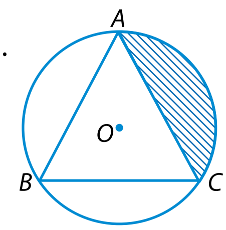


*Fig. 9*

**15** **a)** Construiește un triunghi $ABC$, cu $\sphericalangle A = 60°$, $AB = 3$ cm și $AC = 6$ cm, și cercul circumscris triunghiului $ABC$.
**b)** Calculează raza și lungimea cercului circumscris triunghiului $ABC$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

**a)** Valoarea raportului dintre lungimea unui cerc și lungimea diametrului său este egală cu numărul irațional $\pi$. **A F**
**b)** Lungimea unui arc de cerc și măsura arcului respectiv sunt mărimi direct proporționale. **A F**
**c)** Lungimea unui cerc cu raza de 6 m poate fi estimată la 3768 cm. **A F**
**d)** Punctele $A$ și $B$ se află pe un cerc cu centrul în punctul $O$ și raza de 6 cm. Dacă $\sphericalangle AOB = 30°$, atunci lungimea arcului $AB$ este egală cu $10\pi$ cm. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și două puncte $A$ și $B$ pe cerc.

**a)** Dacă $r = 5$ cm, atunci aria discului este egală cu …
**b)** Dacă $\sphericalangle AOB = 60°$ și $r = 6$ cm, atunci aria sectorului $AOB$ este egală cu …
**c)** Dacă lungimea arcului mic $AB$ este egală cu $9\pi$ și $\widehat{AB} = 90°$, atunci aria discului este egală cu …
**d)** Dacă $\widehat{AB} = 90°$ și $r = 4$ cm, atunci aria sectorului $AOB$ este egală cu …

**1)** $6\pi$ cm²;
**2)** $324\pi$ cm²;
**3)** $20\pi$ cm²;
**4)** $4\pi$ cm²;
**5)** $25\pi$ cm².

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

Aria unui cerc este egală cu $289\pi$ cm². Lungimea cercului este egală cu $\boxed{\phantom{000}}$ $\pi$ cm.

# EVALUARE: CERCUL

## 1. PROBLEME RECAPITULATIVE

**1** Pe un cerc, se consideră punctele $A$, $B$ și $C$, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 50°$ și $\overset{\frown}{BC} = 80°$. Calculează măsura arcului mic $AC$. Câte posibilități sunt?

**2** Pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ sunt situate punctele $A$, $B$, $C$ și $D$, astfel încât $O \in AB$, $CD \perp AB$ și $\overset{\frown}{CBD} = 240°$.
- **a)** Calculează măsurile arcelor $BC$ și $AC$.
- **b)** Demonstrează că triunghiurile $BCD$ și $OCD$ sunt isoscele.
- **c)** Calculează măsurile unghiurilor $DAB$, $ADC$ și $ABC$.
- **d)** Dacă $r = 8$ cm, calculează lungimea coardei $AD$ și distanța de la punctul $B$ la coarda $CD$.

**3** Se consideră cercul $\mathcal{C}(O, r)$, o coardă $AB$ și punctele $C$ și $D$ situate pe cerc de o parte și de alta a dreptei $AB$.
- **a)** Demonstrează că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle BCD$.
- **b)** Calculează $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB$.
- **c)** Dacă $\overset{\frown}{AB} = 110°$ și $C \in \overset{\frown}{AB}$, calculează $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle ACB$.
- **d)** Dacă $\overset{\frown}{AB} = 110°$ și $C \notin \overset{\frown}{AB}$, calculează $\sphericalangle ADB$, $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle ACB$.

**4** Se consideră punctele $A$ și $B$ pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 100°$. Știind că tangenta la cerc în punctul $A$ intersectează mediatoarea segmentului $AB$ în punctul $M$:
- **a)** demonstrează că $MB$ este tangentă la cerc; **b)** calculează măsurile unghiurilor patrulaterului $AOBM$.

**5** Calculează lungimea unui cerc și aria discului, știind că lungimea razei este de:
**a)** 10 cm; **b)** $4\sqrt{3}$ cm; **c)** $6\sqrt{2}$ cm; **d)** 18 cm.

**6** Determină numărul laturilor unui poligon regulat care are măsura unui unghi egală cu:
**a)** 60°; **b)** 90°; **c)** 120°; **d)** 144°.

**7** Determină măsura unghiurilor poligonului regulat cu $n$ laturi, știind că:
**a)** $n = 6$; **b)** $n = 10$; **c)** $n = 12$; **d)** $n = 20$.

**8** Determină câte rotații complete face o roată cu raza de 50 cm pe o distanță de 1 km.

**9**
- **a)** Desenează un poligon regulat cu 12 laturi înscris într-un cerc cu raza de 6 cm.
- **b)** Notează poligonul cu $A_1A_2A_3...A_{12}$ și precizează care dintre următoarele poligoane este poligon regulat:
  i) $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$; ii) $A_1A_4A_7A_{10}$; iii) $A_1A_5A_9$.
- **c)** Calculează perimetrul și aria poligonului $A_1A_3A_5A_7A_9A_{11}$.
- **d)** Calculează lungimea cercului și aria discului.
- **e)** Calculează măsura unui unghi al poligonului și suma măsurilor unghiurilor acestuia.

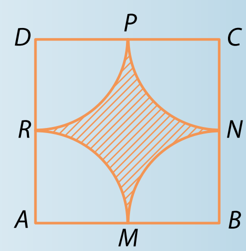
**10** Tangentele dintr-un punct exterior $A$ intersectează cercul de centru $O$ în punctele $B$ și $C$. Calculează lungimea coardei $BC$, știind că aria patrulaterului $BOCA$ este egală cu 432 cm$^2$ și $OA = 36$ cm.

**11** Demonstrează că dreapta determinată de centrul unui cerc și de mijlocul unui arc $AB$ al acestui cerc este perpendiculară pe coarda $AB$ și conține mijlocul coardei.

**12** Coardele $MN$ și $PQ$ ale unui cerc sunt paralele și nu trec prin centrul cercului. Demonstrează că diametrul care trece prin mijlocul coardei $MN$ trece și prin mijlocul coardei $PQ$.

**13** Două cercuri secante de centre $O_1$ și $O_2$ se intersectează în punctele $T_1$ și $T_2$. Dacă punctul $M$ este mijlocul segmentului $T_1T_2$, demonstrează că punctele $O_1$, $M$, $O_2$ sunt puncte coliniare.

**14** Pătratul $ABCD$ din figura alăturată are lungimea laturii de 4 cm. Se notează cu $M$, $N$, $P$ și $R$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$, $CD$ și $AD$.
- **a)** Calculează conturul suprafeței (hașurate) mărginite de arcele $MN$, $NP$, $PR$ și $MR$.
- **b)** Calculează aria suprafeței (hașurate) mărginite de arcele $MN$, $NP$, $PR$ și $MR$.




**15** Pe un cerc, se consideră punctele distincte $A$, $B$, $C$ și $D$, în această ordine, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = 100°$, $\overset{\frown}{BC} = 80°$ și $\overset{\frown}{CD} = 110°$.
- **a)** Calculează măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.
- **b)** Demonstrează că punctele $A$, $O$, $C$ sunt coliniare.

# 2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

(5p) 1. Dacă două coarde ale unui cerc sunt congruente, atunci … .

(5p) 2. Dacă vârfurile unui trapez aparțin unui cerc, atunci laturile neparalele ale trapezului … .

(5p) 3. Dacă $AB$ este diametrul unui cerc de centru $O$ și punctele $M$ și $N$ sunt pe cerc, astfel încât $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BON = 60°$, atunci dreptele $AB$ și $MN$ sunt … .

(5p) 4. Dacă arcul mic de cerc determinat de trei vârfuri consecutive ale unui poligon regulat înscris în cerc are măsura de 60°, atunci numărul laturilor poligonului regulat este egal cu … .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**
Un triunghi echilateral are perimetrul egal cu 36 cm.

| | A | B |
|---|---|---|
| (5p) | 1. Lungimea, în cm, a razei cercului circumscris triunghiului este egală cu … | a) $8\sqrt{3}\,\pi$; |
| (5p) | 2. Lungimea, în cm, a cercului circumscris triunghiului este egală cu … | b) $4\sqrt{3}$; |
| (5p) | 3. Aria, în $cm^2$, a triunghiului este egală cu … | c) $48\pi$; |
| (5p) | 4. Aria, în $cm^2$, a cercului circumscris triunghiului este egală cu … | d) $64\pi$; |
| | | e) $36\sqrt{3}$. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Un unghi al unui poligon regulat cu 6 laturi are măsura egală cu:
A. 120°; B. 140°; C. 134°; D. 144°.

(5p) 2. Dacă lungimea laturii unui hexagon regulat este egală cu lungimea diagonalei unui pătrat cu aria de 32 $cm^2$, atunci aria hexagonului este egală cu:
A. $48\sqrt{2}$ $cm^2$; B. $96\sqrt{3}$ $cm^2$; C. $32\sqrt{3}$ $cm^2$; D. $16\sqrt{2}$ $cm^2$.

(5p) 3. Într-un cerc este înscris triunghiul $ABC$, cu $\sphericalangle A = 50°$ și $\sphericalangle B = 70°$. Măsura arcului mic $AB$ este egală cu:
A. 80°; B. 60°; C. 120°; D. 100°.

(5p) 4. Din punctul $A$ se duce o tangentă la cercul $\mathscr{C}(O, r)$. Dacă $OA = 26$ cm și $r = 10$ cm, atunci lungimea tangentei este egală cu:
A. 25 cm; B. 24 cm; C. 28 cm; D. 20 cm.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

(5p) IV. a) Calculează lungimea unui cerc de centru $O$ și rază $r$, știind că aria discului de centru $O$ și rază $r$ este egală cu $8\pi$ $cm^2$.

(5p) b) Un sector de cerc are aria de $15\pi$ $cm^2$. Determină unghiul la centru corespunzător sectorului, știind că raza cercului este de 15 cm.

(5p) c) Determină numărul laturilor unui poligon regulat care are suma măsurilor unghiurilor egală cu 1080°.

V. Pe un cerc de centru $O$ și raza de 10 cm, se consideră două puncte diametral opuse, notate $A$ și $B$, și o coardă $CD$ perpendiculară pe dreapta $AB$. Știind că $\sphericalangle DAC = 120°$:

(5p) a) calculează măsurile arcelor $AD$ și $BC$;

(5p) b) demonstrează că triunghiurile $ACD$ și $BCD$ sunt isoscele;

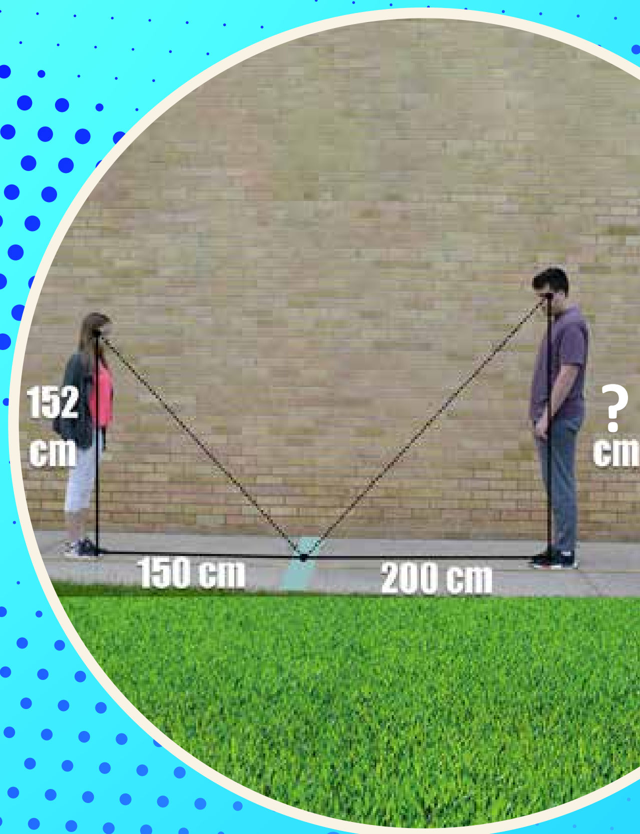
(5p) c) demonstrează că triunghiul $BCD$ este poligon regulat.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# 6

# ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR



# UNITATEA: ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

## LECȚIA 1 Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante

### Ne amintim

- numerele $a_1, a_2, ..., a_n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sunt respectiv proporționale cu numerele $b_1, b_2, ..., b_n$ dacă se poate forma șirul de rapoarte egale: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$;
- proprietatea șirului de rapoarte egale;
- scara unui desen;
- media proporțională sau media geometrică a două numere pozitive;
- construcția prin translație a unei drepte paralele cu o dreaptă dată;
- proprietățile unghiurilor formate de două drepte paralele cu o secantă și criteriile de paralelism.

### Observăm și descoperim cunoștințe noi

**1.** Figura 1 reprezintă la scara 1 : 20 schița unei mașini de spălat rufe, care are *înălțimea h, lungimea L* și *lățimea l*. Pentru lungimile segmentelor din schiță, se folosesc literele: *h' – înălțimea, L' – lungimea* și *l' – lățimea*.

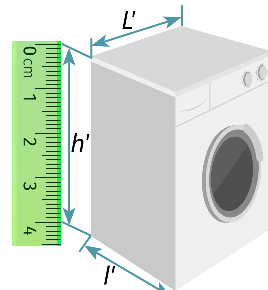


Fig. 1

Pentru dimensiunile reale și pentru cele din schiță, unitatea de măsură este centimetrul. Deoarece *scara este raportul dintre distanța măsurată pe desen și distanța reală*, rezultă că $\frac{h'}{h} = \frac{1}{20}$, $\frac{L'}{L} = \frac{1}{20}$ și $\frac{l'}{l} = \frac{1}{20}$. Obținem șirul de rapoarte egale $\frac{h'}{h} = \frac{L'}{L} = \frac{l'}{l}$, *ceea ce arată faptul că* mărimile *h', L', l'* sunt proporționale cu mărimile *h, L, l*.

**2.** Observăm dreptele paralele din figura 2 și *secanta d, perpendiculară pe dreptele paralele*. Dreptele paralele determină pe secanta *d* segmente de lungimi egale: $AB = BC = CD = DE$.

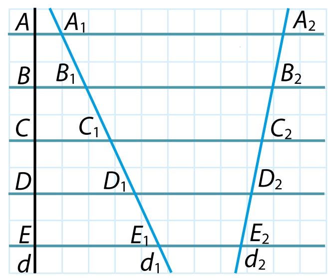


Fig. 2

Dreptele paralele fiind situate la aceeași distanță una de alta, se spune că sunt *drepte paralele echidistante*.

Se poate verifica egalitatea lungimilor segmentelor $A_1B_1$ cu $B_1C_1$, cu $C_1D_1$, cu $D_1E_1$, cu ajutorul unui compas astfel: punând un vârf al compasului în punctul $A_1$ și celălalt în punctul $B_1$, se dă deschiderii compasului lungimea $A_1B_1$. Păstrând lungimea deschiderii compasului, observăm că $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1$ (lungimea deschiderii compasului). Analog, se demonstrează că $A_2B_2 = B_2C_2 = C_2D_2 = D_2E_2$.

Prin urmare, putem să afirmăm că: mai multe drepte paralele echidistante determină pe orice secantă segmente congruente.

Este adevărată și afirmația: dacă mai multe drepte paralele determină pe orice secantă segmente congruente, atunci dreptele sunt paralele echidistante.

### Reține!

- **Definiție:**
  Segmentele *AB, CD* și *EF* sunt respectiv proporționale cu segmentele *A'B', C'D'* și *E'F'* dacă lungimile lor, exprimate în aceeași unitate de măsură, formează șirul de rapoarte egale: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{EF}{E'F'}$.
- **Proprietatea șirului de rapoarte egale:** $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{AB + CD + EF}{A'B' + C'D' + E'F'}$.
- **Teorema paralelelor echidistante**
  Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

**Important**
Teorema paralelelor echidistante ne permite să împărțim un segment dat în segmente de lungimi egale.

## Aplicăm cunoștințele

### Problema 1

Lungimea unui segment *AB* este media proporțională a lungimilor segmentelor *CD* și *EF*. Știind că *CD* = 3 cm și *EF* = 0,12 m, calculează lungimea segmentului *AB*.

***Rezolvare** (activitate pe grupe):* Fixăm unitatea de măsură, de exemplu, centimetrul. Atunci segmentelor *AB*, *CD* și *EF* li se asociază în mod unic numerele $AB = x$, $CD = 3$ și $EF = 12$. Dar lungimea segmentului *AB* este media proporțională a lungimilor segmentelor *CD* și *EF*. Rezultă că $x = \sqrt{3 \cdot 12} = 6$, de unde $x = 6$. Prin urmare, $AB = 6$ cm.

### Problema 2

Împarte un segment dat *AB* în cinci segmente congruente.

***Rezolvare** (activitate frontală):* Construim o semidreaptă *AX*, astfel încât *BAX* să fie unghi propriu (figura 3). Cu ajutorul compasului, pe semidreapta *AX*, construim punctele $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ și $A_5$ astfel: dăm compasului o deschidere de lungime *r* (oarecare) și „purtăm" compasul pe semidreapta *AX*, de la *A* spre *X*, de cinci ori. Evident, $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv A_3A_4 \equiv A_4A_5$. Prin $A_1$, $A_2$, $A_3$ și $A_4$ construim paralelele la dreapta $BA_5$, care intersectează dreapta *AB* în punctele $B_1$, $B_2$, $B_3$ și $B_4$. Obținem $AB_1 \equiv B_1B_2 \equiv B_2B_3 \equiv B_3B_4 \equiv B_4B$ (conform teoremei paralelelor echidistante) și construcția este terminată, deoarece segmentul dat *AB* a fost împărțit în cinci segmente congruente.

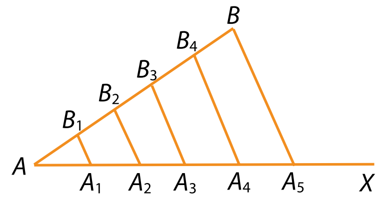



*Fig. 3*

### Problema 3

Un triunghi *ABC* are lungimile laturilor *AB* = 6 m, *AC* = 3 m și *BC* = 5 m. Un alt triunghi *A'B'C'* are laturile proporționale cu ale triunghiului *ABC* și perimetrul egal cu 7. Folosind instrumentele geometrice, construiește cele două triunghiuri la scara 1 : 100.

***Rezolvare** (activitate pe grupe):* Deoarece *AB*, *AC* și *BC* sunt proporționale cu *A'B'*, *A'C'* și *B'C'*, rezultă șirul de rapoarte egale:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ sau } \frac{6}{A'B'} = \frac{3}{A'C'} = \frac{5}{B'C'} = \frac{6+3+5}{A'B'+A'C'+B'C'} = \frac{14}{7} = 2.$$

Rezultă că *A'B'* = 3 m, *A'C'* = 1,5 m și *B'C'* = 2,5 m. Deoarece scara desenului este 1 : 100, rezultă că în desen lungimile segmentelor sunt de 100 de ori mai mici. Prin urmare, *AB* = (6 m) : 100 = 0,06 m = 6 cm. Analog, *AC* = 3 cm, *BC* = 5 cm, *A'B'* = 3 cm, *A'C'* = 1,5 cm și *B'C'* = 2,5 cm, ceea ce permite construcția triunghiurilor *ABC* și *A'B'C'* la scara cerută (figura 4 și figura 5).

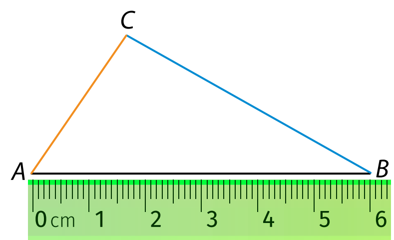



*Fig. 4*

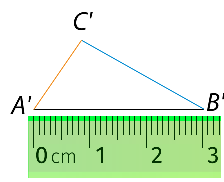



*Fig. 5*

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Punctul *M* este mijlocul segmentului *AB* și punctul *O* este mijlocul segmentului *AM*. Calculează:

**a)** $\frac{AM}{AB}$; **b)** $\frac{AO}{AB}$; **c)** $\frac{AM}{OB}$; **d)** $\frac{AB}{OB}$.

**2** Notăm cu *O* mijlocul segmentului *MN*. Dacă *Q* este un punct interior segmentului *MO*, astfel încât $OQ = 4MQ$, determină rapoartele:

**a)** $\frac{OQ}{MN}$; **b)** $\frac{MQ}{MN}$; **c)** $\frac{OQ}{NQ}$; **d)** $\frac{NQ}{NM}$.

**3** Pe o dreaptă se consideră punctele *A*, *B*, *C* și *D*, în această ordine, astfel încât $\frac{AB}{BD} = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{2}$. Se notează cu *M* mijlocul segmentului *AB*. Demonstrează că segmentele:

**a)** *AB*, *AC*, *BC* și *BD* sunt proporționale; **b)** *AM*, *MC*, *AB* și *AD* sunt proporționale.

**4** Se consideră triunghiul isoscel *ABC*, cu *AB* = *AC*. Pe latura *AB*, se iau punctele *M* și *N*, astfel încât $MB = 2 \cdot AM$ și $AN = 2 \cdot BN$. Prin punctele *M* și *N*, se construiesc paralelele la dreapta *BC*, care intersectează latura *AC* în punctele *P*, respectiv *Q*. Dacă *BC* = 5 cm și *QC* = 2,5 cm, calculează perimetrul triunghiului *ABC*.

**5** Pe latura $BC$ a trapezului $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, se consideră punctele $E_1$, $E_2$, $E_3$, astfel încât $BE_1 = E_1E_2 = E_2E_3 = E_3C$. Paralelele la dreapta $CD$ prin punctele $E_1$, $E_2$, $E_3$ intersectează latura $AD$ prin punctele $F_1$, $F_2$, respectiv $F_3$. Dacă $BC = 12$ cm și $AD = 8$ cm, calculează:

**a)** lungimile segmentelor $AF_1$, $DF_2$, $BE_2$, $CE_3$;  **b)** rapoartele $\frac{AF_2}{AF_3}, \frac{AF_1}{AD}, \frac{F_2F_3}{AD}, \frac{BE_3}{E_1E_3}, \frac{E_1E_2}{E_1E_3}$.

**6** Pe segmentul $AB$, cu lungimea de 18 cm, se consideră un punct $M$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{5}$.
**a)** Determină lungimile segmentelor $AM$ și $MB$.
**b)** Dacă punctul $N$ este interior segmentului $MB$ și $\frac{MN}{NB} = \frac{2}{3}$, calculează rapoartele $\frac{AM}{AN}, \frac{AN}{AB}, \frac{MN}{AB}, \frac{NB}{AN}$.

**7** În figura 6, punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{1}{2}$. Punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele segmentelor $AB$, respectiv $CD$ și $MC = 9$ cm.
**a)** Calculează lungimile segmentelor $MB$, $AC$, $MN$ și $CD$.
**b)** Demonstrează că segmentele $AM$, $BC$ și $DN$ sunt respectiv proporționale cu segmentele $MC$, $BD$ și $AN$.

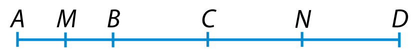


*Fig. 6*

**8** Un punct $M$ împarte segmentul $AB$ în raportul $k$, iar un alt punct $N$ împarte același segment în raportul $\frac{1}{k}$. Demonstrează că: **a)** $AM = BN$;  **b)** $AN = BM$.

**9** Dreptele $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ și $d_5$, paralele și echidistante, determină pe o secantă segmentele $AD$, $DE$, $EF$ și $FB$ (figura 7). Știind că $C \in d_3$, $AC \cap d_2 = \{M\}$, $BC \cap d_4 = \{N\}$, demonstrează că: **a)** $AB = 4 \cdot EF$;  **b)** $AN$ este mediană a triunghiului $ABC$;
**c)** dreptele $DN$, $CE$ și $FM$ sunt concurente.

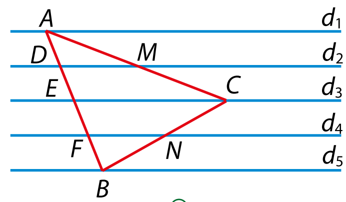


*Fig. 7*

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **3 puncte**

**a)** Prin raportul a două segmente, înțelegem raportul dintre lungimile celor două segmente măsurate cu unități de măsură diferite. **A F**

**b)** Mai multe drepte paralele și echidistante determină, pe orice secantă, segmente congruente. **A F**

**c)** Dacă trei sau mai multe drepte paralele determină pe o secantă segmente congruente, atunci dreptele sunt paralele echidistante. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

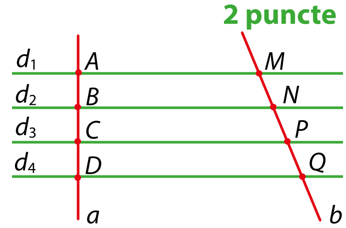
Pe un segment $AB$, se consideră punctele $C$ și $D$, astfel încât $\frac{AC}{CB} = \frac{3}{5}$ și $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{3}$. Valoarea raportului:

**a)** $\frac{AC}{AB}$ este egală cu …
**b)** $\frac{CD}{CB}$ este egală cu …
**c)** $\frac{AC}{BD}$ este egală cu …
**d)** $\frac{BD}{CD}$ este egală cu …

**1)** $\frac{2}{5}$;
**2)** 1;
**3)** $\frac{3}{8}$;
**4)** $\frac{3}{2}$;
**5)** $\frac{2}{3}$.

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **2 puncte**

În figura alăturată, dreptele $d_1$, $d_2$, $d_3$ și $d_4$ sunt drepte paralele echidistante, iar $a$ și $b$ sunt două secante oarecare. Valoarea raportului $\frac{NP}{MQ}$ este egală cu ☐.



# LECȚIA 2 Teorema lui Thales și reciproca teoremei lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale

## Ne amintim

- teorema paralelelor echidistante;
- segmente proporționale;
- împărțirea unui segment într-un număr de segmente congruente.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

**1.** Observăm figura 1. Segmentul $AB$ este împărțit în 5 segmente congruente, iar punctul $M$ aparține segmentului $AB$. Dacă notăm cu $x$ lungimea unuia dintre cele cinci segmente congruente, atunci $AB = 5x$, $MA = 3x$, $MB = 2x$ și $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ sau $\frac{MA}{3} = \frac{MB}{2}$,

*Fig. 1*

ceea ce arată că *lungimile segmentelor MA și MB sunt direct proporționale cu numerele* 3, *respectiv* 2. Se spune că *punctul M împarte segmentul AB în raportul* $\frac{3}{2}$.

**2.** Desenăm un triunghi oarecare $ABC$ și un punct $M$ pe latura $AB$. Prin punctul $M$, construim paralela la latura $BC$ și notăm cu $N$ punctul de intersecție a acesteia cu latura $AC$. Folosind rigla gradată, constatăm că: $AB$ = 56 mm, $AM$ = 14 mm și $MB$ = 56 mm – 14 mm = 42 mm. Rezultă că $\frac{AM}{MB} = \frac{14\text{ mm}}{42\text{ mm}} = \frac{1}{3}$ sau $\frac{AM}{1} = \frac{MB}{3}$.

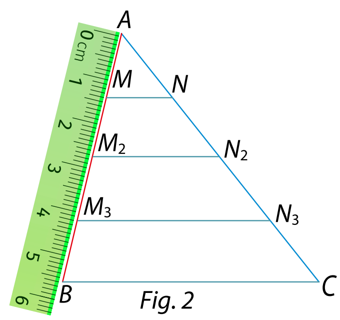


*Fig. 2*

Prin urmare, lungimile segmentelor $AM$ și $MB$ sunt proporționale cu numerele 1, respectiv 3.

Notăm cu $k$ coeficientul de proporționalitate, adică $\frac{AM}{1} = \frac{MB}{3} = k$ și rezultă că $AM = k$, $MB = 3k$ și $AB = AM + MB = 4k$. Împărțim segmentul $AB$ în patru segmente congruente prin punctele $M_1$, $M_2$, $M_3$. Rezultă că $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3B = k$. Deoarece $AM = k$ și $AM_1 = k$, rezultă că punctele $M$ și $M_1$ coincid și $AM = MM_2 = M_2M_3 = M_3B$.

Prin punctele $M$, $M_2$, $M_3$, construim paralele la dreapta $BC$, care intersectează latura $AC$ în punctele $N$, $N_2$, $N_3$.

Deoarece paralelele la dreapta $BC$ determină pe secanta $AB$ segmente congruente, paralelele respective determină și pe secanta $AC$ segmente congruente (teorema paralelelor echidistante).

Rezultă că $AN = NN_2 = N_2N_3 = N_3C$ și atunci $\frac{AN}{AC} = \frac{AN}{3AN} = \frac{1}{3}$. Cum $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, rezultă că $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ (figura 2).

Prin urmare, paralela $MN$ la latura $BC$ a triunghiului $ABC$ determină pe celelalte două laturi segmentele $AM$ și $AN$, respectiv $MB$ și $NC$, iar $AM$ și $AN$ sunt respectiv proporționale cu $MB$ și $NC$.

Argumentele de mai sus sugerează că, dacă $M \in AB$, $N \in AC$ și $MN \parallel BC$, rezultă că $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ (figura 3, figura 4 și figura 5).

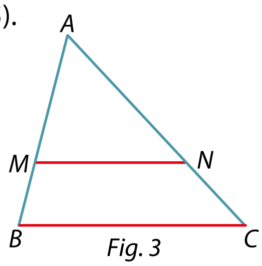


*Fig. 3*

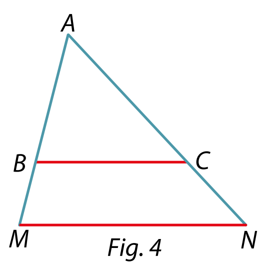


*Fig. 4*

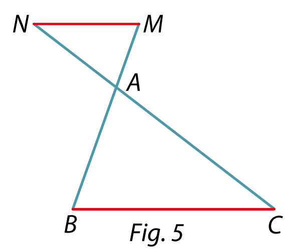


*Fig. 5*

Acest rezultat reprezintă teorema lui Thales. Formal, se scrie: $M \in AB,\ N \in AC,\ MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

**Diferite forme ale teoremei lui Thales:**

Din proporția $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ (figura 6), prin adunarea numărătorului la numitor, rezultă proporția derivată:

$$\frac{AM}{AM + MB} = \frac{AN}{AN + NC}\text{, adică } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \text{ (figura 7).}$$

Din proporția $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$, prin adunarea numitorului la numărător, rezultă proporția derivată:

$$\frac{AM+MB}{MB}=\frac{AN+NC}{NC}\text{, adică } \frac{AB}{MB}=\frac{AC}{NC} \text{ (figura 8).}$$

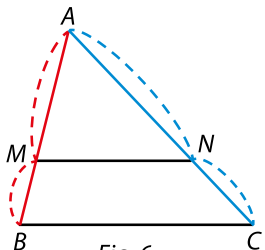



*Fig. 6*

$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$

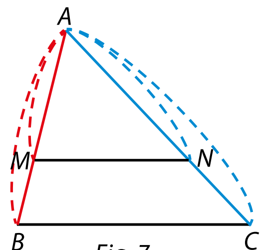



*Fig. 7*

$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

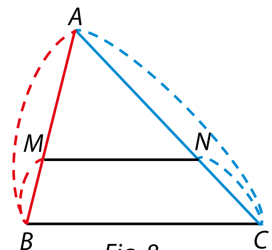



*Fig. 8*

$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MB}{AB}=\frac{NC}{AC}$

Se observă că cei doi membri ai proporției, partea stângă și partea dreaptă, prin care se exprimă proporționalitatea laturilor, au aceeași formă. Mai precis:

$$\frac{\text{partea de sus din stânga}}{\text{partea de jos din stânga}}=\frac{\text{partea de sus din dreapta}}{\text{partea de jos din dreapta}}$$

(figura 6)

$$\frac{\text{partea de sus din stânga}}{\text{toată latura din stânga}}=\frac{\text{partea de sus din dreapta}}{\text{toată latura din dreapta}}$$

(figura 7)

$$\frac{\text{partea de jos din stânga}}{\text{toată latura din stânga}}=\frac{\text{partea de jos din dreapta}}{\text{toată latura din dreapta}}$$

(figura 8)

În fiecare dintre aceste proporții, se pot schimba mezii sau extremii între ei sau se pot inversa rapoartele.

## Rezolvăm împreună

Construiește un punct $P$ pe un segment dat $MN$ care să împartă segmentul $MN$ în raportul $\frac{3}{5}$.

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Se notează cu $x$ lungimea segmentului $MN$ și se construiesc pe segment punctele $A_1, A_2, A_3, ..., A_7$, în această ordine, care împart segmentul $MN$ în opt segmente congruente, fiecare având lungimea $\frac{x}{8}$. Dacă $P$ este pe segmentul $MN$ și îl împarte în raportul $\frac{3}{5}$, rezultă că $\frac{PM}{3}=\frac{PN}{5}=\frac{PM+PN}{8}=\frac{x}{8}$. Din $\frac{PM}{3}=\frac{x}{8}$ rezultă că $PM=\frac{3x}{8}$. Cum $MA_3 = MA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 = \frac{3x}{8} = PM$, rezultă că punctul căutat este $A_3$, adică $P$ coincide cu $A_3$.

Observăm că segmentul $MN$ a fost împărțit în două părți (segmente) direct proporționale cu numerele 3 și 5.

## Reține!

◆ **Teorema lui Thales**

O paralelă la una dintre laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi (sau pe dreptele determinate de acestea) segmente proporționale.

◆ **Reciproca teoremei lui Thales**

Dacă o dreaptă determină pe două laturi ale unui triunghi (sau pe dreptele determinate de acestea) segmente proporționale, atunci această dreaptă este paralelă cu a treia latură a triunghiului.

◆ **Definiție:**

**Punctul $M$ împarte un segment $AB$ în raportul $\frac{p}{q}$** $(p > 0, q > 0)$ dacă $M$ aparține segmentului $AB$ și lungimile segmentelor $AM$ și $MB$ sunt respectiv proporționale cu numerele $p$ și $q$, adică $\frac{AM}{p}=\frac{MB}{q}$.

## Aplicăm cunoștințele

Dacă $AD$ este bisectoarea unghiului $BAC$ al unui triunghi oarecare $ABC$ și $D$ este pe latura $BC$, demonstrează că $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Construim paralela prin vârful $B$ la dreapta $AD$ și notăm cu $E$ punctul de intersecție cu dreapta $AC$ (figura 9). Dreptele paralele $AD$ și $EB$ formează cu secanta $AC$ unghiuri corespondente congruente și cu secanta $AB$ unghiuri alterne interne congruente. Rezultă că $\sphericalangle BEA \equiv \sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle EBA \equiv \sphericalangle BAD$. Deoarece $AD$ este bisectoare, rezultă că $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle DAC$ și $\sphericalangle BEA \equiv \sphericalangle EBA$, deci triunghiul $ABE$ este isoscel cu baza $EB$, adică $AE \equiv AB$. Deoarece $AD$ este paralelă cu latura $EB$ a triunghiului $CEB$, aplicând teorema lui Thales, rezultă că $\frac{CD}{DB}=\frac{CA}{AE}$, de unde, inversând rapoartele, rezultă că $\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{AC}$.

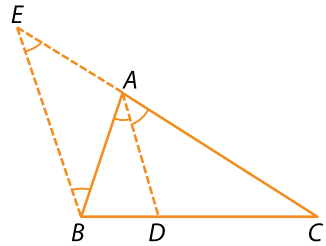


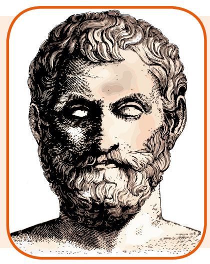
*Fig. 9*

Din $AE=AB$ obținem că $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

**Observație:** Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de **teorema bisectoarei**: bisectoarea unui unghi al unui triunghi determină pe latura opusă unghiului segmente proporționale cu laturile unghiului.

**Știai că...**

**Thales din Milet** (n. 625 – d. 540 î.H., Milet) a fost un filozof grec, care a contribuit la dezvoltarea matematicii, astronomiei și filozofiei. Este considerat părintele științelor. În domeniul matematicii, Thales a adus geometria în Grecia, familiarizându-se cu ea în timpul călătoriilor sale în Egipt și dezvoltând-o ulterior. Teoremele de geometrie elaborate de el au constituit temelia matematicii grecești.



## Proiect

Se spune că un punct $M$ determină pe un segment $AB$ *proporția de aur* dacă $\frac{AB}{AM}=\frac{AM}{MB}$. Rezultatul împărțirii $AM : MB$ este un număr irațional.

Acest număr este *numărul de aur* și se notează cu litera grecească $\varphi$.

**a)** Folosind proporția de mai sus, demonstrează că $\left(\varphi-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

**b)** Demonstrează că $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

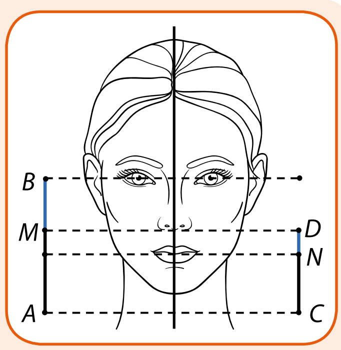

**c)** Știind că $\sqrt{1,25} = 1,118033...$, arată că $1,618 < \varphi < 1,6181$.

**Știai că...**

*Numărul de aur* $\varphi$ („fi”) este un număr irațional, cunoscut drept „proporția de aur”, pe care îl întalnim în cele mai surprinzătoare împrejurări. De exemplu, acesta este omniprezent în proporțiile corpului uman. Figura alăturată ilustrează două exemple:

$$\frac{AB}{AM}=\frac{AM}{MB}=\varphi \text{ și } \frac{CD}{CN}=\frac{CN}{ND}=\varphi.$$

În artă, se consideră că proporția de aur exprimă frumosul. Potrivit lui Marcus Vitruvius Pollio, arhitect, inginer civil și militar, secolul I î.H., „pentru ca un întreg împărțit în părți inegale să pară frumos, trebuie să existe între partea mică și cea mare același raport ca între partea mare și întreg”.



## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Punctele $D$ și $E$ sunt situate pe laturile unui triunghi $ABC$, $D \in AB$ și $E \in AC$, iar $DE \parallel BC$.

**a)** Dacă $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$, determină valorile rapoartelor $\frac{AE}{EC}, \frac{AE}{AC}, \frac{CE}{AC}$.

**b)** Dacă $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$, calculează valorile rapoartelor $\frac{AD}{DB}, \frac{AD}{AB}, \frac{DB}{AB}$.

**2** Se consideră un triunghi $ABC$ și se construiește o paralelă $DE$ la latura $BC$ ($D \in AB$, $E \in AC$). Completează tabelul de mai jos, știind că lungimile sunt exprimate în aceeași unitate de măsură.

| | **AB** | **AC** | **AD** | **AE** | **DB** | **EC** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **a)** | 9 | 18 | 3 | | | |
| **b)** | | | 5 | 7 | 15 | |
| **c)** | 0,9 | | | 5 | | 2,5 |
| **d)** | | $5\sqrt{3}$ | | | $6\sqrt{2}$ | $2\sqrt{3}$ |
| **e)** | $\sqrt{7}$ | | $0{,}2\sqrt{7}$ | $\sqrt{5}$ | | |

**3** Fie triunghiul $ABC$ și punctele $D$ și $E$, astfel încât punctul $A$ să fie interior segmentelor $BD$, respectiv $CE$ și $DE \parallel BC$ (figura 10).

**a)** Dacă $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm și $AC = 4$ cm, determină lungimile segmentelor $BD$, $AE$ și $CE$.

**b)** Dacă $CE = 18$ cm, $AE = 12$ cm și $AD = 6$ cm, calculează lungimile segmentelor $AC$, $AB$ și $BD$.

**c)** Dacă $BD = 24$ cm, $AD = 16$ cm și $AC = 12$ cm, determină lungimile segmentelor $AB$, $AE$ și $CE$.

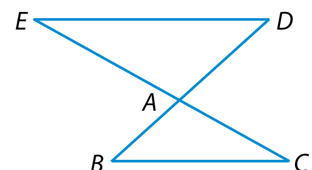


*Fig. 10*

**4** Fie un triunghi $ABC$ și punctele $E \in BC$, respectiv $F \in AB$.

**a)** Dacă $\frac{BE}{BC} = \frac{3}{7}$ și $\frac{BF}{AF} = \frac{3}{4}$, demonstrează că $EF \parallel AC$.

**b)** Dacă $\frac{AF}{AB} = \frac{5}{11}$ și $\frac{BE}{BC} = \frac{6}{11}$, demonstrează că $EF \parallel AC$.

**5** În triunghiul $ABC$, punctele $M$ și $N$ sunt situate pe laturile $BA$, respectiv $BC$. Demonstrează că $MN \parallel AC$, dacă:

**a)** $BM = \sqrt{3}$ cm, $AM = 3\sqrt{3}$ cm, $BN = 3\sqrt{2}$ cm și $CN = 9\sqrt{2}$ cm;

**b)** $BN = 0{,}7$ dm, $BC = 10$ cm, $AB = 0{,}5$ dm și $AM = 1{,}5$ cm;

**c)** $NC = 4$ cm, $BC = 10$ cm, $BM = 3$ cm și $AM = 2$ cm.

**6** Se consideră un triunghi $MNP$ și punctele $R \in MN$ și $S \in MP$, astfel încât punctul $M$ să fie interior segmentelor $NR$ și $SP$ (figura 11). Demonstrează că $RS \parallel NP$, dacă:

**a)** $MR = 2\sqrt{3}$ cm, $NR = 6\sqrt{3}$ cm, $SM = 3$ cm și $PS = 9$ cm;

**b)** $MN = 12$ cm, $NR = 16$ cm, $SM = 5$ cm și $PM = 15$ cm;

**c)** $MR = 0{,}6$ dm, $MN = 2$ cm, $PM = 0{,}3$ dm și $PS = 1{,}2$ dm.

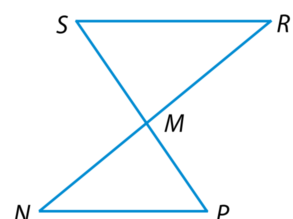


*Fig. 11*

**7** Se consideră un triunghi $ABC$ și punctele $M$ și $N$, $M \in AB$, respectiv $N \in AC$, astfel încât $MN \parallel BC$.

**a)** Dacă $AM = 2$ cm, $MB = 5$ cm și $AC = 10{,}5$ cm, determină lungimile segmentelor $AB$, $AN$ și $CN$.

**b)** Dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{3}{7}$ și $AC = 20$ cm, calculează lungimile segmentelor $AN$ și $NC$.

**8** Fie trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, și punctele $E$ și $F$ pe latura $AD$, astfel încât $\frac{AF}{3} = \frac{EF}{5} = \frac{DE}{6}$ (figura 12). Știind că $EG \parallel CD$, $FH \parallel AB$ și $BC = 28$ cm, determină lungimile segmentelor $CG$, $BH$, $CH$, $BG$ și $GH$.

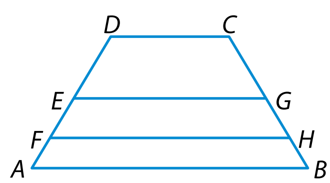


*Fig. 12*

**9** Se notează cu $O$ intersecția diagonalelor unui trapez $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$.
**a)** Demonstrează că $AO \cdot DO = BO \cdot CO$.
**b)** Dacă $AO = 3x - 1$, $BO = x + 3$, $OC = 8$ cm și $OD = 4$ cm, determină valoarea lui $x$.

**10** Punctele $D$ și $E$ sunt situate pe laturile $AB$ și $AC$ ale triunghiului $ABC$ (figura 13), astfel încât $DE \parallel BC$. Dacă punctul $F$ este intersecția cu latura $AB$ a paralelei prin punctul $E$ la dreapta $CD$, demonstrează că $AD^2 = AB \cdot AF$.

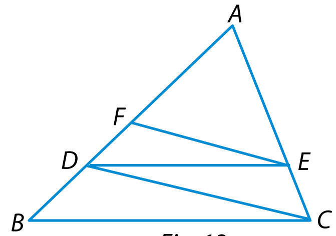


*Fig. 13*

**11** Un segment $AB$, cu lungimea de 96 mm, este împărțit de două puncte, $M$ și $N$, în trei segmente ale căror lungimi sunt direct proporționale cu numerele 3, 4 și 5. Calculează lungimile segmentelor $AM$, $MN$, respectiv $NB$.

**12** Pe latura $AB$ a triunghiului $ABC$, se consideră punctele $M$ și $N$. Paralelele la dreapta $AC$ prin aceste puncte intersectează latura $BC$ în punctele $P$ și $Q$ (figura 14). Dacă $AM = 8$ cm, $BM = 10$ cm, $MN = 4$ cm și $BC = 27$ cm, determină lungimile segmentelor:
**a)** $BN$; **b)** $AB$; **c)** $BQ$; **d)** $BP$; **e)** $PC$.

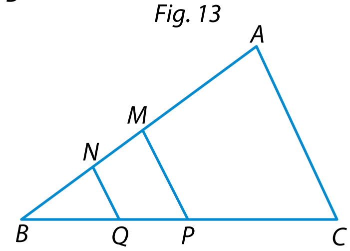


*Fig. 14*

**13** Semidreapta $OZ$ este interioară unghiului propriu $XOY$. Punctele $A$, $B$ și $C$ sunt puncte necoliniare ce aparțin semidreptelor $OX$, $OY$, respectiv $OZ$. Paralela printr-un punct $M$, $M \in OX$, la dreapta $AB$ intersectează semidreapta $OY$ în punctul $N$, iar paralela prin punctul $M$ la dreapta $AC$ intersectează semidreapta $OZ$ în punctul $P$ (figura 15). Demonstrează că $BC \parallel NP$.

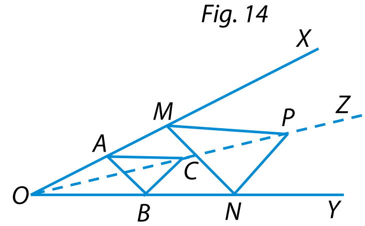


*Fig. 15*

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

Triunghiul $ABC$ are laturile $AB = 18$ cm și $AC = 12$ cm. Punctele $D$ și $E$ aparțin laturii $AB$ și $AD = BE = 6$ cm. Punctele $F$ și $G$ aparțin laturii $AC$ și $AF = CG = 4$ cm. Dacă punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele segmentelor $AB$, respectiv $AC$, atunci:

**a)** $DF \parallel BG$; **A** **F**
**b)** $FM \parallel EG$; **A** **F**
**c)** $FD \parallel GE$; **A** **F**
**d)** $MN \parallel BC$. **A** **F**

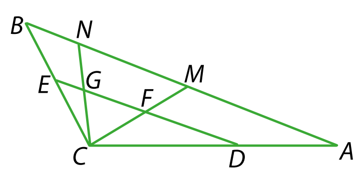
**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

În figura de mai jos, punctul $M$ este mijlocul segmentului $AB$, punctul $N$ este mijlocul segmentului $AM$, iar punctul $P$ este mijlocul segmentului $AN$. Dacă $MN = 4$ cm, atunci lungimea segmentului:

| | |
|---|---|
| **a)** $PM$ este egală cu … | **1)** 6 cm; |
| **b)** $PN$ este egală cu … | **2)** 8 cm; |
| **c)** $MB$ este egală cu … | **3)** 2 cm; |
| **d)** $NB$ este egală cu … | **4)** 12 cm; |
| | **5)** 4 cm. |


**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

În figura alăturată, triunghiul $CMN$ este isoscel, cu $CM = CN$, și $DE \parallel AB$. Dacă $CD = 16$ cm, $AD = 12$ cm, $CE = 8$ cm și $BE = CF$, atunci $CN = \boxed{\phantom{00}}$ cm.



# LECȚIA 3 Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării

## Ne amintim

- teorema și reciproca teoremei lui Thales;
- proprietatea tangentelor dintr-un punct exterior la un cerc.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

În mod obișnuit, se spune că două figuri sunt asemenea dacă una dintre ele este un model redus la scară al celeilalte. De exemplu, două hărți ale aceleiași țări, executate la scări diferite, sunt asemenea. Două fotografii (una mai mare, alta mai mică) ale aceleiași persoane sunt asemenea. Cele două desene de mai jos (figura 1) seamănă între ele, deci sunt figuri asemenea. La fel, triunghiurile $ABC$ și $A'B'C'$ seamănă între ele (figura 2), deci sunt triunghiuri asemenea. Să le studiem cu mai multă atenție.

*Fig. 1*

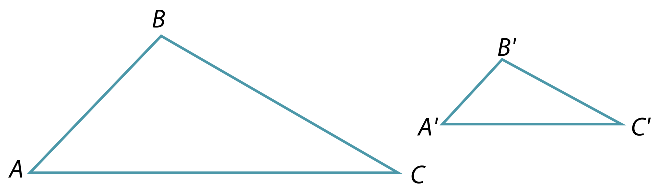



*Fig. 2*

Comparăm laturile celor două triunghiuri, $ABC$ și $A'B'C'$, folosind un compas. Dăm compasului deschiderea $A'B'$, apoi cu acul compasului în punctul $A$ construim pe segmentul $AB$ punctul $M$ (figura 3). Rezultă că $AM = A'B'$. Fără a-i modifica deschiderea, folosind din nou compasul, verificăm că lungimea segmentului $MB$ este egală cu lungimea deschiderii compasului, adică $MB = A'B'$.

Prin urmare, $AM = A'B' = MB$. Deoarece $AM = MB$, rezultă că punctul $M$ este mijlocul laturii $AB$ și $AM = MB = \frac{1}{2}AB$.

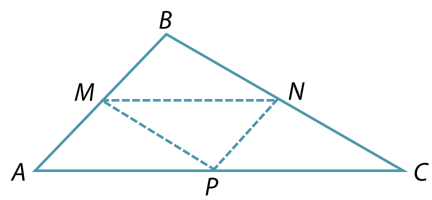



*Fig. 3*

Cum $AM = A'B' = MB$, rezultă că $A'B' = MB = \frac{1}{2}AB$.

Analog, se construiesc punctele $N$ și $P$ pe laturile $BC$ și $CA$ și se arată că $N$ și $P$ sunt mijloacele acestor laturi, $B'C' = BN = \frac{1}{2}BC$ și $A'C' = CP = \frac{1}{2}AC$. Rezultă: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{1}{2}$.

Prin urmare, laturile $AB$, $BC$ și $CA$ ale triunghiului $ABC$ sunt respectiv proporționale cu laturile $A'B'$, $B'C'$ și $C'A'$.

Din $A'B' = MB$, $B'C' = BN$, $MN = \frac{1}{2}AC = A'C'$ rezultă că $\Delta A'B'C' \equiv \Delta MBN$ (criteriul LLL), deci unghiurile triunghiului $A'B'C'$ sunt respectiv congruente cu unghiurile triunghiului $MBN$.

Suntem conduși astfel spre definiția triunghiurilor asemenea.

Două triunghiuri $ABC$ și $A'B'C'$ (figura 4) sunt **triunghiuri asemenea** dacă: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$. Dacă două triunghiuri $ABC$ și $A'B'C'$ sunt asemenea, scriem $\Delta ABC \sim A'B'C'$.

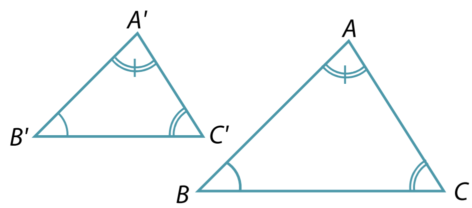



*Fig. 4*

Observăm că între vârfurile celor două triunghiuri există o corespondență descrisă cu ajutorul figurii 5. Astfel, vârfului $A$ îi corespunde vârful $A'$ și, reciproc, vârfului $A'$ îi corespunde vârful $A$. La fel pentru vârfurile $B$ și $B'$, respectiv $C$ și $C'$.

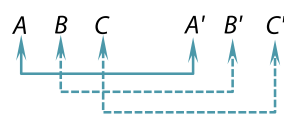



*Fig. 5*

Din această corespondență deducem corespondența între unghiurile și laturile celor două triunghiuri. Laturile care se opun unghiurilor congruente din cele două triunghiuri se numesc laturi omoloage.

## Rezolvăm împreună

O paralelă la latura $BC$ a unui triunghi $ABC$ intersectează dreptele $AB$ și $AC$, determinate de celelalte două laturi, în punctele $D$ și $E$. Demonstrează că $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Sunt posibile trei cazuri:
– cazul I – punctele $D$ și $E$ sunt pe laturile $AB$ și $AC$ (figura 6);
– cazul II – punctele $D$ și $E$ sunt pe semidreptele opuse semidreptelor $BA$ și $CA$ (figura 7);
– cazul III – punctele $D$ și $E$ sunt pe semidreptele opuse semidreptelor $AB$ și $AC$ (figura 8).

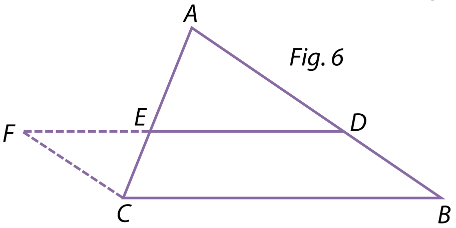



*Fig. 6*

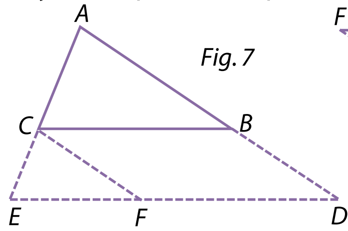



*Fig. 7*

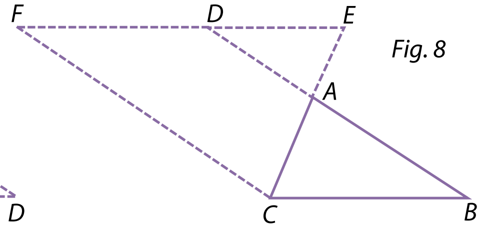



*Fig. 8*

Cazul I (figura 6). Pentru a demonstra că $\Delta ADE \sim \Delta ABC$, trebuie să demonstrăm *congruența unghiurilor celor două triunghiuri* și *proporționalitatea laturilor lor.*

Pentru $DE \parallel BC$, secantele $DB$ și $EC$ determină perechile de unghiuri corespondente congruente: $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle ACB$. Unghiurile $DAE$ și $BAC$ coincid, deci sunt congruente. Prin urmare, *unghiurile triunghiurilor ADE și ABC sunt congruente*. Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul $ABC$, cu $DE \parallel BC$, și obținem $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (1).

Construim paralela prin $C$ la $AB$ și notăm cu $F$ punctul în care aceasta intersectează latura $DE$. Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul $AED$, cu $CF \parallel AD$, și obținem $\frac{AE}{EC} = \frac{ED}{EF}$. Formăm proporții derivate, $\frac{AE}{EC+AE} = \frac{ED}{EF+ED}$, și obținem $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{FD}$ (2). Patrulaterul $BCFD$ este paralelogram, deci $FD \equiv BC$ și astfel egalitatea (2) devine $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC}$ (3). Din (1) și (3) rezultă că $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC}$, adică rezultă proporționalitatea laturilor celor două triunghiuri. Având unghiurile respectiv congruente și laturile omoloage respectiv proporționale, triunghiurile $ADE$ și $ABC$ sunt asemenea. Analog, se rezolvă cazurile II și III.

Problema anterioară conduce la formularea și demonstrarea *teoremei fundamentale a asemănării.*

### Reține!

- **Definiții:**
  - Două triunghiuri sunt **triunghiuri asemenea** dacă au unghiurile respectiv congruente și laturile omoloage proporționale.
  - Dacă două triunghiuri sunt asemenea, atunci raportul lungimilor a două laturi omoloage se numește **raport de asemănare**.
- Dacă raportul de asemănare a două triunghiuri asemenea este egal cu 1, atunci **triunghiurile sunt congruente și reciproc**.
- **Teorema fundamentală a asemănării**

  O paralelă la una dintre laturile unui triunghi formează cu celelalte două laturi (sau cu dreptele determinate de celelalte două laturi) un triunghi asemenea cu triunghiul inițial.

## Aplicăm cunoștințele

Două cercuri de raze $R$ și $r$, $R \neq r$, cu centrele în punctele $A$ și $C$, sunt tangente exterioare în punctul $B$ (figura 9). O tangentă comună celor două cercuri intersectează dreapta $AC$ în punctul $P$ și cercurile, în punctele $L$ și $N$. Tangenta în $B$ la cele două cercuri intersectează $LP$ în punctul $M$.

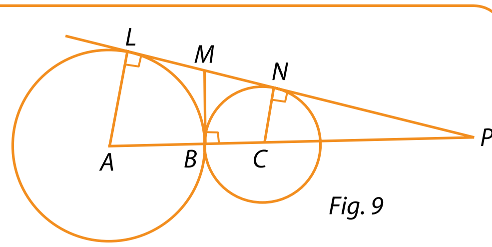



*Fig. 9*

**a)** Demonstrează că $\Delta NCP \sim \Delta LAP$.

**b)** Știind că $R = 9$ cm, $r = 4$ cm, $LN = 12$ cm, $PC = 10{,}4$ cm și $PN = 9{,}6$ cm, demonstrează că $\Delta NCP \sim \Delta BMP$.

***Demonstrație** (activitate frontală):*

**a)** Deoarece $BM$ și $LN$ sunt tangente cercurilor în punctele $B$, $L$ și $N$, rezultă că $MB \perp AP$, $AL \perp LP$, $CN \perp LP$ (proprietatea tangentei într-un punct la cerc). Rezultă că unghiurile $MBP$, $ALP$ și $CNP$ sunt unghiuri drepte și $CN \parallel AL$. Cum triunghiurile $NCP$ și $LAP$ sunt dreptunghice și au $\sphericalangle NPC \equiv \sphericalangle LAP$ (unghi comun), rezultă că *unghiurile lor sunt congruente*. Deoarece $CN \parallel AL$, considerând triunghiul $ALP$ și aplicând *teorema lui Thales*, rezultă că $\dfrac{PN}{PL} = \dfrac{PC}{PA}$. Cum $PA = AB + BC + PC = 9 + 4 + 10{,}4 = 23{,}4$, rezultă că $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{10{,}4}{23{,}4} = \dfrac{4}{9}$ și atunci $\dfrac{PN}{PL} = \dfrac{PC}{PA} = \dfrac{4}{9} = \dfrac{NC}{LA}$.

Prin urmare, *laturile corespunzătoare unghiurilor congruente în triunghiurile NCP și LAP* sunt proporționale. *Având unghiurile respectiv congruente și laturile omoloage respectiv proporționale*, rezultă că $\Delta NCP \sim \Delta LAP$.

**b)** Cum triunghiurile $NCP$ și $BMP$ sunt dreptunghice și au $\sphericalangle NCP \equiv \sphericalangle BMP$ (unghi comun), rezultă că unghiurile lor sunt congruente. Deoarece $ML = MB = MN$ (proprietatea tangentei dintr-un punct exterior la un cerc) și $LN = 12$ cm, rezultă că $ML = MB = MN = 6$ cm. Cum $PN = 9{,}6$ cm și $MN = 6$ cm, rezultă că $MP = PN + MN = 15{,}6$ cm și $PB = PC + BC = 14{,}4$ cm. Atunci $\dfrac{PN}{BP} = \dfrac{9{,}6}{14{,}4} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{NC}{MB} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{CP}{MP} = \dfrac{10{,}4}{15{,}6} = \dfrac{2}{3}$ și rezultă că $\dfrac{PN}{BP} = \dfrac{NC}{MB} = \dfrac{CP}{MP} = \dfrac{2}{3}$.

*Având unghiurile respectiv congruente și laturile omoloage respectiv proporționale*, rezultă că $\Delta NCP \sim \Delta BMP$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** În figura 10, se știe că $MN \parallel AC$. Scrie egalitatea rapoartelor obținute prin aplicarea teoremei fundamentale a asemănării în fiecare dintre cele trei cazuri:

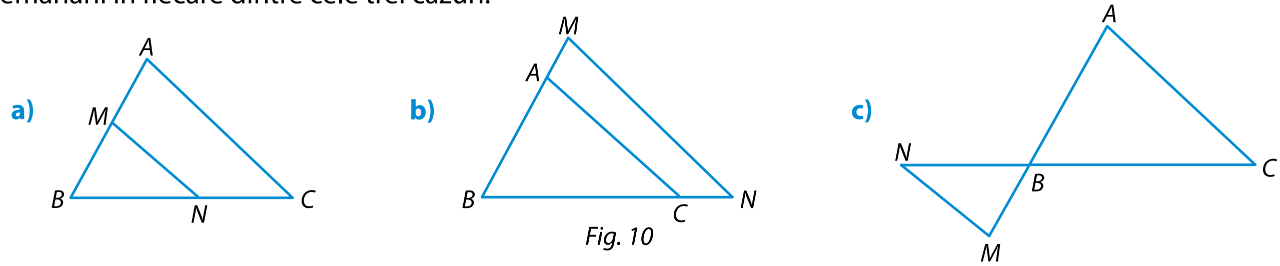


*Fig. 10*

**2** În figura 11, se știe că $DE \parallel AB$. Determină valoarea numărului $x$ în fiecare dintre următoarele cazuri:

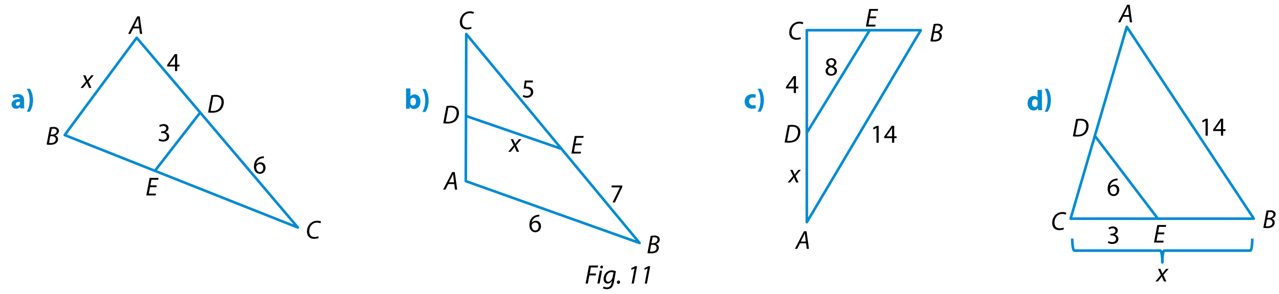


*Fig. 11*

**3** Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

**a)** Dacă $\sphericalangle A = 37°$ și $\sphericalangle C = 79°$, determină măsura unghiului $N$.

**b)** Dacă $\sphericalangle M = 65°$ și $\sphericalangle N = 41°$, calculează măsura unghiului $C$.

**c)** Dacă $\sphericalangle A = 53°$ și $\sphericalangle N = 72°$, determină măsura unghiului $P$.

**d)** Dacă $\sphericalangle B = 48°$ și $\sphericalangle P = 70°$, calculează măsura unghiului $A$.

**4** Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, având raportul de asemănare $\dfrac{3}{5}$.

**a)** Dacă $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm și $AC = 12$ cm, determină lungimile segmentelor $ED$, $EF$ și $DF$.

**b)** Dacă $DE = 15$ cm, $EF = 20$ cm și $DF = 25$ cm, calculează lungimile segmentelor $AB$, $BC$ și $AC$.

**5** Se consideră $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, având raportul de asemănare $\dfrac{5}{7}$.

**a)** Dacă $\mathcal{P}_{ABC} = 65$ cm, calculează perimetrul triunghiului $A'B'C'$.

**b)** Dacă $\mathcal{P}_{A'B'C'} = 35$ cm, calculează perimetrul triunghiului $ABC$.

**6** Se consideră $\Delta MNP \sim \Delta DEF$.

**a)** Știind că $MN = 6$ cm, $NP = 8$ cm, $MP = 10$ cm și $\mathcal{P}_{DEF} = 72$ cm, calculează lungimile segmentelor $DE$, $EF$ și $DF$.

**b)** Știind că $DE = 12$ cm, $EF = 5$ cm, $DF = 12$ cm și $\mathcal{P}_{MNP} = 87$ cm, calculează lungimile laturilor triunghiului $MNP$.

**7** Punctele $E$ și $F$ sunt situate pe latura $CD$ a paralelogramului $ABCD$, astfel încât $CE = EF = DF$. Determină perimetrul triunghiului $AMB$, știind că $\{M\} = AE \cap BF$ și că $\mathcal{P}_{EFM} = 18$ cm.

**8** Punctul $M$ este situat pe latura $CD$ a paralelogramului $ABCD$ (figura 12). Știind că $AM \cap BC = \{N\}$ și $AM \cap BD = \{P\}$, demonstrează că $\frac{MN}{AN} + \frac{MP}{AP} = 1$.

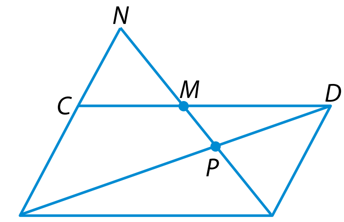


*Fig. 12*

**9** Într-un triunghi dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, se notează cu $M$ mijlocul ipotenuzei și cu $H$, piciorul perpendicularei din $A$ pe latura $BC$. Știind că $\Delta ABC \sim \Delta HMA$, determină măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului $ABC$.

**10** În figura 13, $ABCD$ este trapez, cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Paralela prin punctul $O$ la bazele trapezului intersectează laturile neparalele $BC$ și $AD$ în punctele $E$, respectiv $F$. Demonstrează că punctul $O$:

**a)** împarte diagonalele $AC$ și $BD$ într-un raport egal cu raportul bazelor trapezului;

**b)** este mijlocul segmentului $EF$.

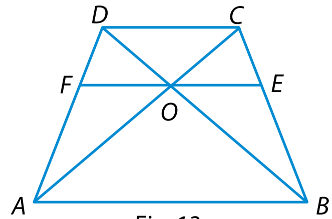


*Fig. 13*

**11** Se consideră un triunghi $ABC$ și $EF \parallel BC$, $E \in AB$, $F \in AC$. Dacă punctele $M$ și $N$ sunt situate pe segmentele $BC$, respectiv $EF$ și $\frac{BM}{MC} = \frac{EN}{FN}$, demonstrează că punctele $A$, $N$ și $M$ sunt coliniare.

**12** O dreaptă $d$, care trece prin centrul de greutate al unui triunghi $ABC$, intersectează laturile $AB$ și $AC$ în punctele $E$, respectiv $F$ (figura 14). Punctul $M$ este mijlocul laturii $BC$, iar punctul $G$ este centrul de greutate al triunghiului. Demonstrează că $\frac{BE}{AE} + \frac{CF}{AF} = 1$.

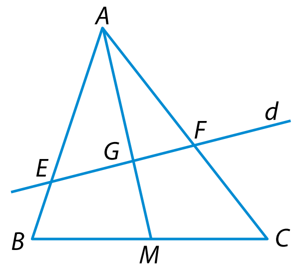


*Fig. 14*

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, atunci:

**a)** $\Delta CAB \sim \Delta PNM$; **A** **F**

**b)** $\Delta CAB \sim \Delta MNP$; **A** **F**

**c)** $\Delta CAB \sim \Delta PMN$; **A** **F**

**d)** $\Delta ACB \sim \Delta MPN$. **A** **F**

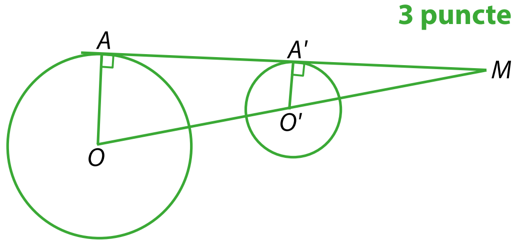
**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Notăm cu $\mathcal{P}_{ABC}$, respectiv cu $\mathcal{P}_{DEF}$ perimetrul triunghiului $ABC$, respectiv perimetrul triunghiului $DEF$. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 8$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 10$ cm și $\mathcal{P}_{DEF} = 4 \cdot \mathcal{P}_{ABC}$, atunci:

| | |
|---|---|
| **a)** $DE = \ldots$ | **1)** 24 cm; |
| **b)** $EF = \ldots$ | **2)** 32 cm; |
| **c)** $DF = \ldots$ | **3)** 40 cm; |
| **d)** $2 \cdot \mathcal{P}_{ABC} = \ldots$ | **4)** 48 cm; |
| | **5)** 64 cm. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

În figura alăturată, punctele $O$ și $O'$ sunt centrele celor două cercuri, iar dreapta $MA$ este tangentă celor două cercuri în punctele $A$, respectiv $A'$. Dacă $OA = 15$ cm, $O'A' = 9$ cm și $OO' = 30$ cm, atunci lungimea segmentului $MO'$ este egală cu $\boxed{\phantom{000}}$ cm.



# LECȚIA 4 Criterii de asemănare a triunghiurilor

## Ne amintim

- definiția triunghiurilor congruente și a triunghiurilor asemenea;
- teorema fundamentală a asemănării.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Pe baza teoremei fundamentale a asemănării, vom demonstra trei teoreme cu ajutorul cărora putem decide dacă două triunghiuri sunt sau nu asemenea. Aceste teoreme se numesc criterii de asemănare. Următoarele probleme sunt utile în demonstrarea acestor criterii.

### PROBLEMA 1

Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și $\Delta MNP \sim \Delta A'B'C'$, demonstrează că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (figura 1).

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Având în vedere *definiția triunghiurilor congruente*, din $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ rezultă că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle M$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$ și $AB \equiv MN$, $BC \equiv NP$, $CA \equiv PM$ (1).

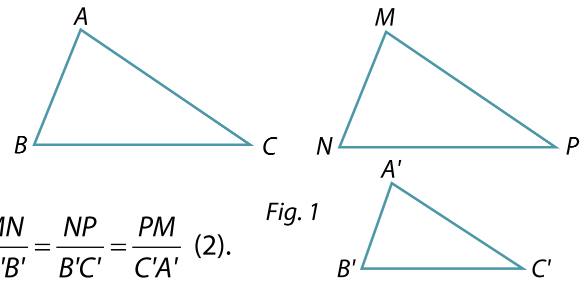


Fig. 1

Din $\Delta MNP \sim \Delta A'B'C'$ rezultă că $\sphericalangle M \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle N \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle P \equiv \sphericalangle C'$ și $\frac{MN}{A'B'} = \frac{NP}{B'C'} = \frac{PM}{C'A'}$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$. Având în vedere definiția triunghiurilor asemenea, rezultă că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

### PROBLEMA 2

Dacă $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ (figura 2), arată că $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.

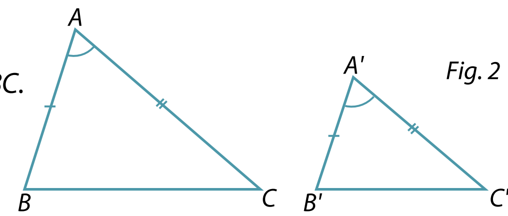


Fig. 2

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Construim punctul $M$ pe semidreapta $AB$, astfel încât $AM = A'B'$, și construim punctul $N$ pe semidreapta $AC$, astfel încât $AN = A'C'$ (figura 3). Cum unghiurile $MAN$ și $BAC$ coincid, rezultă că $\sphericalangle B'A'C' \equiv \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle MAN$ și $\Delta B'A'C' \equiv \Delta MAN$. Din enunțul problemei, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, ținând cont de egalitățile de mai sus, rezultă că $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$. Prin urmare, dreapta $MN$ determină pe laturile triunghiului segmente proporționale și, conform *reciprocei teoremei lui Thales*, $MN \parallel BC$. Aplicând teorema fundamentală a asemănării, rezultă că $\Delta MAN \sim \Delta BAC$. Deoarece $\Delta B'A'C' \equiv \Delta MAN$ și $\Delta MAN \sim \Delta BAC$, conform problemei precedente, rezultă că $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.

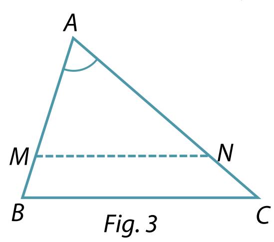


Fig. 3

Prin urmare, am demonstrat că două triunghiuri care au o pereche de unghiuri respectiv congruente și laturile care determină aceste unghiuri respectiv proporționale sunt asemenea.

Acest rezultat este o teoremă numită **criteriul de asemănare LUL**. Analog, se demonstrează alte două criterii de asemănare:

**Criteriul de asemănare UU**

Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (figura 4).

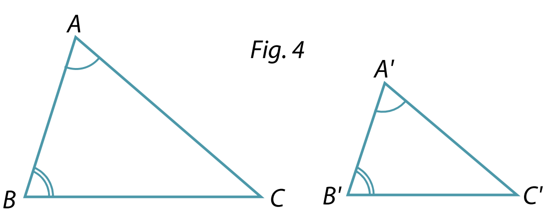


Fig. 4

**Criteriul de asemănare LLL**

Dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ (figura 5).

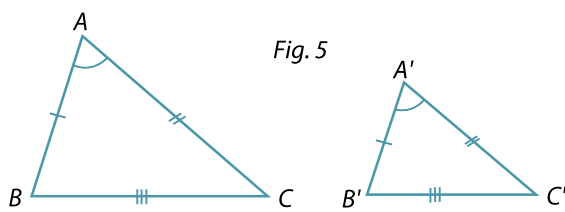
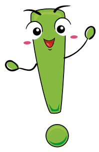


Fig. 5

## Reține!

**Criterii de asemănare:**
- **Criteriul LUL.** Două triunghiuri care au o pereche de unghiuri respectiv congruente și laturile care determină aceste unghiuri respectiv proporționale sunt asemenea.
- **Criteriul UU.** Două triunghiuri care au două unghiuri respectiv congruente sunt asemenea.
- **Criteriul LLL.** Două triunghiuri care au laturile respectiv proporționale sunt asemenea.



**Important**
Utilizarea asemănării triunghiurilor este o metodă de rezolvare a unor probleme de geometrie. Aceasta presupune recunoașterea și demonstrarea unor triunghiuri asemenea, acelea în care intervin segmentele sau relațiile care ne interesează, scrierea rapoartelor care exprimă proporționalitatea laturilor și, dintre acestea, selectarea celor utile în rezolvarea problemei.

## Aplicăm cunoștințele

În figura 6, *ABCD* și *AMNP* sunt pătrate, *E* este mijlocul laturii *BC*, iar *Q* este mijlocul laturii *NP*. Dacă $AD \cap BM = \{R\}$ și $BM \cap DP = \{T\}$, arată că:

**a)** $MB \equiv PD$; **b)** $\dfrac{AE}{AQ} = \dfrac{AB}{AP}$; **c)** $\Delta ABR \sim \Delta TDR$; **d)** $BM \perp DP$.

***Demonstrație*** *(activitate pe grupe):*
**a)** Rezultă din $\Delta ABM \equiv \Delta ADP$.
**b)** Rezultă din asemănarea triunghiurilor *ABE* și *APQ* (criteriul LUL).
**c)** Din $\Delta ABM \equiv \Delta ADP$ rezultă că $\sphericalangle ABR \equiv \sphericalangle ADT$. Din $\sphericalangle ABR \equiv \sphericalangle ADT$ și criteriul UU rezultă că $\Delta ABR \sim \Delta TDR$.
**d)** Rezultă din $\Delta ABR \sim \Delta TDR$.

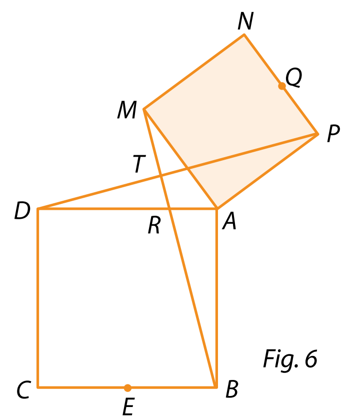



*Fig. 6*

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Analizează cu atenție figura 7, precizează triunghiurile asemenea, menționează cazul de asemănare și scrie pentru fiecare pereche de triunghiuri proporționalitatea laturilor și congruența triunghiurilor.

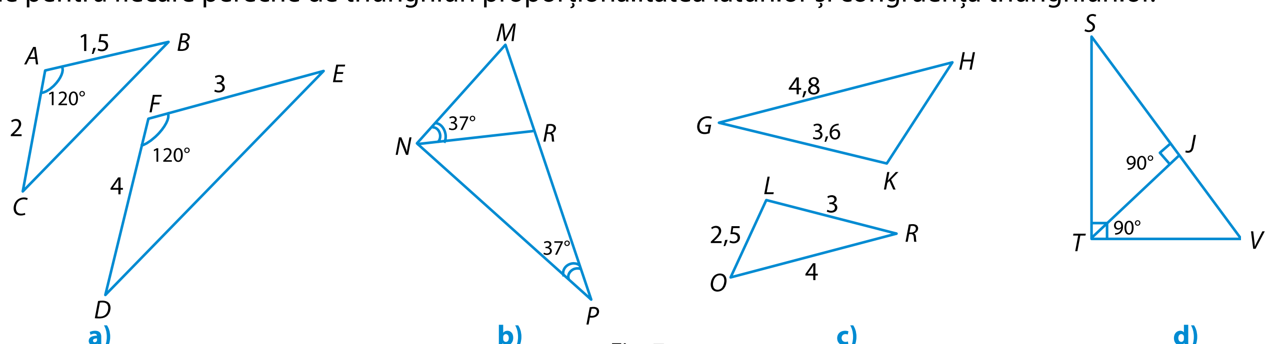



*Fig. 7*

**2** Analizează triunghiul cu vârfurile în punctele *A*, *B*, *C* și pe cel cu vârfurile în punctele *D*, *E*, *F*, precizează triunghiurile congruente, menționează cazul de asemănare și scrie pentru fiecare pereche de triunghiuri proporționalitatea laturilor și congruența unghiurilor în următoarele situații:

**a)** $\sphericalangle A = 43°30'$, $\sphericalangle C = 46°30'$, $\sphericalangle F = 90°$ și $\sphericalangle E = 43°30'$;
**b)** $AB = 30$ cm, $BC = 4$ dm, $\sphericalangle B = 60°$, $DE = 6$ dm, $EF = 80$ cm și $\sphericalangle E = 60°$;
**c)** $AB = 10$ cm, $BC = 1{,}2$ dm, $AC = 0{,}14$ m, $EF = 3$ dm, $FD = 36$ cm, $DE = 42$ cm;
**d)** $AB = AC = 30$ cm, $\sphericalangle A = 70°$, $DE = DF = 16$ cm, $\sphericalangle E = 55°$.

**3** Arată că:
**a)** oricare două triunghiuri echilaterale sunt triunghiuri asemenea;
**b)** oricare două triunghiuri dreptunghice isoscele sunt triunghiuri asemenea.

**4** Triunghiul *ABC* este isoscel, cu $AB = AC$ și $\sphericalangle A = 36°$. Bisectoarea unghiului *ABC* intersectează latura *AC* în punctul *M*. Demonstrează că:

**a)** $\Delta ABC \sim \Delta BMC$; **b)** $BC^2 = AC \cdot MC$.

**5** Punctul *M* aparține laturii *BC* a triunghiului *ABC* și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle MAC$ (figura 8).

**a)** Demonstrează că $\Delta CAM \sim \Delta CBA$.

**b)** Știind că $AC = 10$ cm și $MC = 4$ cm, determină lungimea segmentului *BC*.

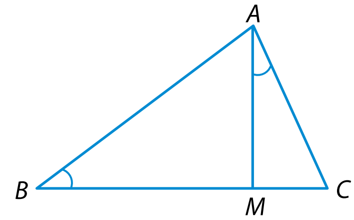


*Fig. 8*

**6** Notăm cu *H* punctul de intersecție a înălțimilor *AD*, $D \in BC$, și *BE*, $E \in AC$, ale triunghiului ascuțitunghic *ABC*. Demonstrează că:

**a)** $\Delta ACD \sim \Delta BCE$; **b)** $\Delta AEH \sim \Delta BDH$.

**7** Se consideră un triunghi *ABC* și punctele $D \in AB$, respectiv $E \in AC$, astfel încât $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$ (figura 9). Știind că $AD = 2$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm și $AC = 4$ cm, calculează lungimile segmentelor *AE* și *DE*.

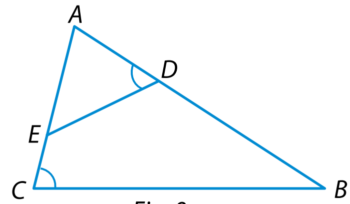


*Fig. 9*

**8** Notăm cu *O* punctul de intersecție a diagonalelor rombului *ABCD*, în care $AC > BD$, cu *E* notăm piciorul perpendicularei din *B* pe *AD* ($E \in AD$) și cu *H* notăm intersecția dreptelor *AC* și *BE*. Demonstrează că:

**a)** $\Delta AEH \sim \Delta BOH$; **b)** $\Delta COD \sim \Delta BED$; **c)** $\Delta AEH \sim \Delta COB$.

**9** Pe laturile *AD* și *CD* ale dreptunghiului *ABCD*, cu $AB = 2BC$, se iau punctele *M*, respectiv *N* (figura 10), astfel încât $AM = 2DN$. Dacă $AN \cap BM = \{H\}$, demonstrează că $\sphericalangle AHM = 90°$.

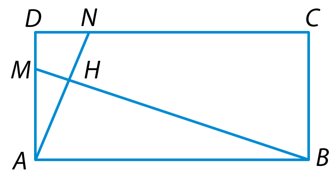


*Fig. 10*

**10** În triunghiul *ABC*, cu $\sphericalangle A = 90°$, construim înălțimea *AD*, $D \in BC$. Demonstrează că:

**a)** $AB^2 = BC \cdot BD$; **b)** $AC^2 = BC \cdot CD$; **c)** $AD^2 = BD \cdot CD$.

**11** Diagonalele trapezului dreptunghic *ABCD*, cu $AB \parallel CD$ și $\sphericalangle A = 90°$, sunt perpendiculare. Demonstrează că:

**a)** $\Delta ABD \sim \Delta DAC$; **b)** $AD^2 = AB \cdot CD$.

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

Se consideră triunghiurile *ABC* și *DEF*.

**a)** Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$ și $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. **A F**

**b)** Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$ și $AB = AC$, $DE = DF$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$. **A F**

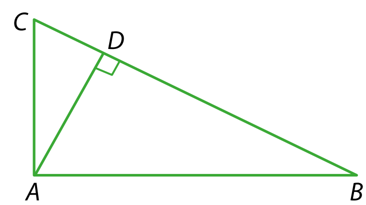
**c)** Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, atunci $A \equiv \sphericalangle D$ și $\frac{DE}{AB} = \frac{AC}{DF}$. **A F**

**d)** Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, atunci $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle EDF$. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

În figura de mai jos, triunghiul *ABC* este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB \neq AC$, iar cu *D* se notează piciorul perpendicularei din punctul *A* pe dreapta *BC*.

**a)** $\Delta ABC$ este asemenea cu … **1)** $\Delta BDA$;
**b)** $\Delta ACB$ este asemenea cu … **2)** $\Delta BAD$;
**c)** $\Delta BAC$ este asemenea cu … **3)** $\Delta DBA$;
**d)** $\Delta BCA$ este asemenea cu … **4)** $\Delta CAB$;
**5)** $\Delta DCA$.




**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

Triunghiurile *ABC* și *MNP* au $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle P$, $AB = 18$ cm, $BC = 10$ cm, $AC = 20$ cm și $MN = 36$ cm. Perimetrul triunghiului *MNP* este egal cu ______ cm.

# LECȚIA 5 Aplicații: raportul ariilor a două triunghiuri asemenea, aproximarea în situații practice a distanțelor folosind asemănarea

## Ne amintim

- definiția triunghiurilor asemenea;
- teorema și reciproca teoremei lui Thales;
- teorema fundamentală a asemănării și criteriile de asemănare.

## Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea

### Rezolvăm împreună

**PROBLEMA 1**

Fie $AD$ și $A'D'$ înălțimile triunghiurilor $ABC$ și $A'B'C'$, $D \in BC$ și $D' \in B'C'$ (figura 1). Dacă $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ și $\dfrac{B'C'}{BC} = k'$, atunci demonstrează că $\dfrac{A'D'}{AD} = k$.

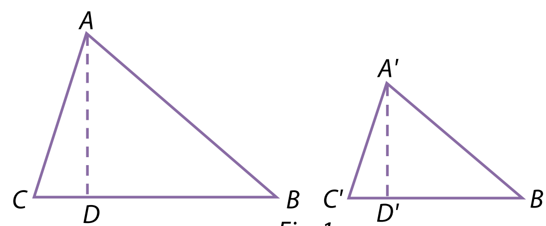


*Fig. 1*

***Demonstrație*** *(activitate pe grupe):*
Din ipoteză, $AD \perp BC$ și $A'D' \perp B'C'$, deci $AD$ și $A'D'$ sunt înălțimi în triunghiurile $ABC$ și $A'B'C'$, corespunzătoare laturilor $BC$ și $B'C'$. Rezultă că $\sphericalangle ADB = \sphericalangle A'D'B' = 90°$. Deoarece $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, din *definiția asemănării triunghiurilor* rezultă că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ și $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$. Triunghiurile $ADB$ și $A'D'B'$, având două unghiuri congruente ($\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle A'D'B'$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$), sunt triunghiuri asemenea (criteriul de asemănare UU). Rezultă că $\dfrac{A'D'}{AD} = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$ și concluzia este demonstrată.

**Observație:** Dacă două triunghiuri $ABC$ și $A'B'C'$ sunt asemenea, despre înălțimile $AD$ și $A'D'$ ($D \in BC$ și $D' \in B'C'$) se spune că sunt corespunzătoare laturilor omoloage $BC$ și $B'C'$.

**Dicționar:**
*omolog* = care corespunde, care se află în corespondență.

Prin urmare, problema ne arată că raportul înălțimilor corespunzătoare laturilor omoloage a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare a triunghiurilor.

**PROBLEMA 2**

Dacă $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ și $\dfrac{A'B'}{AB} = k$, atunci demonstrează că $\dfrac{\mathscr{A}_{A'B'C'}}{\mathscr{A}_{ABC}} = k^2$.

***Demonstrație*** *(activitate pe grupe):*
Construim înălțimile $AD$ și $A'D'$ ($D \in BC$ și $D' \in B'C'$) corespunzătoare laturilor omoloage $BC$ și $B'C'$ (figura 1).
Conform problemei precedente, deoarece $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ și $\dfrac{B'C'}{BC} = k$, rezultă că $\dfrac{A'D'}{AD} = k$.

Aplicând *formula de calcul pentru calculul ariei unui triunghi*, rezultă că $\mathscr{A}_{ABC} = \dfrac{BC \cdot AD}{2}$ și $\mathscr{A}_{A'B'C'} = \dfrac{B'C' \cdot A'D'}{2}$, de unde $\dfrac{\mathscr{A}_{A'B'C'}}{\mathscr{A}_{ABC}} = \dfrac{B'C' \cdot A'D'}{BC \cdot AD} = \dfrac{B'C'}{BC} \cdot \dfrac{A'D'}{AD} = k^2$.

**Observație:** Problema ne arată că raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare a triunghiurilor.

**Reține!**

- Raportul înălțimilor corespunzătoare laturilor omoloage a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare a triunghiurilor.
- Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare a triunghiurilor.

## ◆ Aproximarea în situații practice a distanțelor folosind asemănarea

### Aplicăm cunoștințele

Definiția asemănării, teorema fundamentală a asemănării și criteriile de asemănare au o importanță deosebită, fiind folositoare la aproximarea în situații practice a distanțelor. De exemplu:

**1. Calculul înălțimii Marii Piramide din Giza**

Pentru a calcula înălțimea piramidei lui Keops, matematicianul grec Thales a măsurat lungimea bazei piramidei și înălțimea toiagului său (figura 2). Apoi, în același timp al zilei, a măsurat lungimea umbrei piramidei și lungimea umbrei toiagului. Au rezultat următoarele date:

- lungimea bazei piramidei: $AB = 230$ m (baza piramidei formează pătratul $ABCD$, cu centrul în $O$);
- umbra înălțimii piramidei: $MU = 65$ m;
- înălțimea toiagului: $TP = 1{,}63$ m;
- lungimea umbrei toiagului: $PT' = 2$ m.

**Știai că...**

Orașul Giza este, după Cairo și Alexandria, al treilea oraș ca mărime din Egipt. **Piramidele din Giza** se numără printre cele mai cunoscute piramide din Antichitate, ele fiind considerate una dintre cele șapte minuni ale lumii antice. Marea Piramidă din Giza, cunoscută și sub denumirea de **piramida lui Keops**, a fost construită în jurul anilor 2580-2560 î.H. Conform unor surse istorice, matematicianul grec Thales a aplicat asemănarea triunghiurilor pentru a determina înălțimea piramidei lui Keops.

**Dicționar:**
*toiag* = baston pe care se sprijină cineva la mers.

Pe baza acestor date, calculează lungimea înălțimii $VO$ a piramidei lui Keops.

***Demonstrație*** *(activitate pe grupe):*

Observăm următoarele: $\sphericalangle PT'T = \sphericalangle OUV$ (unghiuri determinate de razele soarelui cu solul, adică cu orizontala), $TP \perp PT'$ (toiagul este perpendicular pe sol), $VO \perp OU$ (înălțimea piramidei este perpendiculară pe sol). Rezultă că $\Delta VOU \sim \Delta TPT'$ (criteriul de asemănare UU) și, conform definiției asemănării, obținem $\frac{VO}{TP} = \frac{OU}{PT'}$, de unde $VO = \frac{OU \cdot TP}{PT'}$. Deoarece $O$ este centrul pătratului, rezultă că $AB = MN = 2OM = 230$ m și $OM = 115$ m, respectiv $OU = OM + MU = 180$ m. Din $VO = \frac{OU \cdot TP}{PT'}$ rezultă că

$$VO = \frac{180 \cdot 1{,}63}{2} = 146{,}70 \text{ (m)}.$$

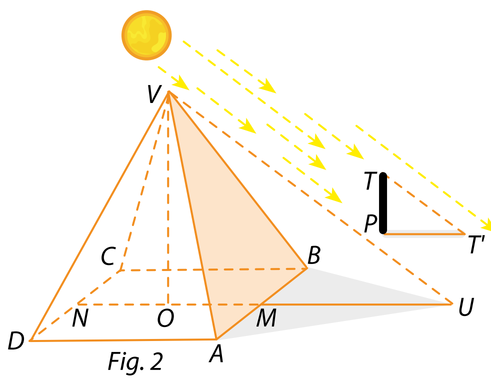


*Fig. 2*

Prin urmare, Thales a obținut că înălțimea piramidei lui Keops este de 146,70 m.

**2. Determinarea înălțimii unui copac cu ajutorul umbrei**

Înfige vertical în pământ un baston. Măsoară lungimea bastonului, lungimea umbrei lui, cât și lungimea umbrei copacului. Calculează înălțimea copacului, cunoscând:

- lungimea umbrei copacului: $AB = 2{,}80$ m;
- înălțimea bastonului: $MP = 0{,}96$ m;
- lungimea umbrei bastonului: $MN = 0{,}64$ m.

***Demonstrație*** *(activitate individuală):*

Observăm că metoda folosită pentru determinarea înălțimii copacului este identică cu metoda folosită de Thales pentru determinarea înălțimii piramidei lui Keops. Din asemănarea triunghiurilor $BAC$ și $NMP$ rezultă că $AC = \frac{AB \cdot MP}{MN}$. Înlocuind cu datele din enunț, rezultă că înălțimea copacului este egală cu 4,20 m.

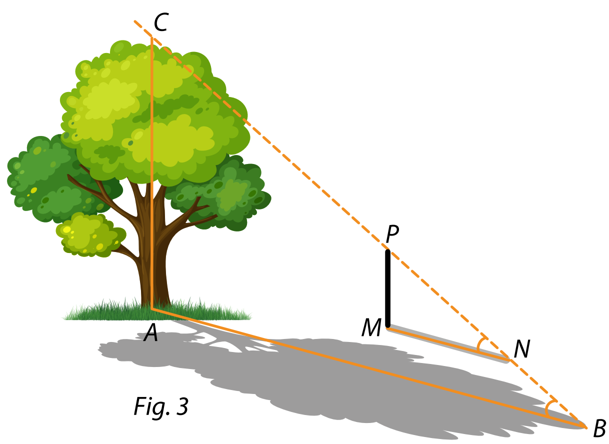


*Fig. 3*

### 3. Determinarea adâncimii unei fântâni

În sol este săpată o fântână (figura 4). Punctele $A$ și $P$, diametral opuse, sunt la suprafața solului. O persoană se depărtează de fântână în punctul $M$, pe linia $AP$, la distanța $PM$. Calculează *distanța dintre nivelul solului și nivelul apei*, cunoscând:

- diametrul fântânii: $AP = 2$ m;
- înălțimea persoanei: $OM = 1{,}65$ m;
- distanța de la persoană la fântână: $PM = 0{,}66$ m.

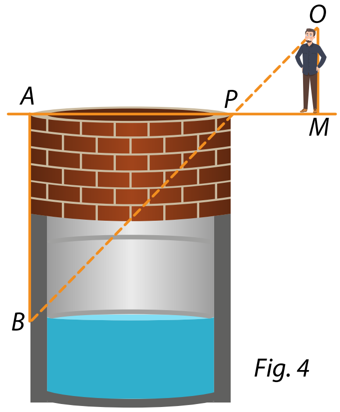


Fig. 4

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*
Observăm următoarele: $\sphericalangle OPM = \sphericalangle BPA$ (unghiuri opuse la vârf), $OM \perp PM$ (persoana este perpendiculară pe sol) și $AB \perp AP$ (fântâna este perpendiculară pe sol). Rezultă că $\Delta OMP \sim \Delta BAP$ (criteriul de asemănare UU). Conform definiției asemănării, rezultă că $\frac{AB}{OM} = \frac{AP}{PM}$, de unde $AB = \frac{AP \cdot OM}{PM}$. Înlocuind cu datele din enunț, rezultă că *distanța* cerută este egală cu 5 m.

## Portofoliu

**1. Determinarea distanței dintre un copac și un zid**

Într-o curte împrejmuită de un zid este un copac înalt de 10 m (figura *a*). La ce distanță față de zid se află copacul, știind că înălțimea zidului este de 3,16 m, iar la o distanță de 10 m de zid se află o persoană înaltă de 1,80 m, care vede doar vârful copacului?

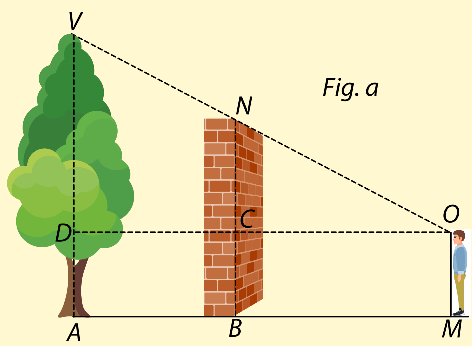


Fig. a

**2. Calculul unor lungimi**

Zidul unei case este sprijinit de o bârnă, iar bârna este unită cu zidul printr-o stinghie $CD$ (figura *b*). Se știe că $AB = 3{,}30$ m, $AD = 3{,}30$ m și $DM = 2{,}97$ cm.

**a)** Calculează lungimea stinghiei $CD$.

**b)** Cu cât trebuie să scurtăm stinghia dacă vrem s-o fixăm mai sus cu 55 cm?

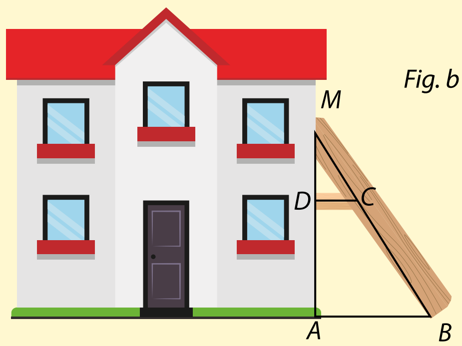


Fig. b

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Determină valoarea raportului ariilor a două triunghiuri asemenea, $ABC$ și $MNP$, știind că:

**a)** $\frac{AB}{MN} = \frac{2}{3}$; **b)** $\frac{BC}{NP} = \frac{3}{5}$; **c)** $\frac{MP}{AC} = \frac{4}{3}$.

**2** Determină valoarea raportului de asemănare a două triunghiuri asemenea, $ABC$ și $DEF$, știind că:

**a)** $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}} = \frac{1}{9}$; **b)** $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}} = \frac{49}{4}$; **c)** $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}} = \frac{25}{16}$.

**3** Calculează ariile a două triunghiuri asemenea care au:

**a)** valoarea raportului de asemănare 0,(6) și suma ariilor 117 cm$^2$;

**b)** valoarea raportului de asemănare 1,75 și diferența ariilor 594 cm$^2$.

**4** Perimetrele a două triunghiuri asemenea sunt de 24 cm, respectiv 60 cm, iar aria celui mai mic dintre triunghiuri este de 144 cm$^2$. Determină aria celuilalt triunghi.

**5** În figura 5, punctul $E$ este mijlocul laturii $DC$, iar punctul $F$ este intersecția dreptei $BE$ cu diagonala $AC$. Determină valoarea raportului:

**a)** perimetrelor triunghiurilor $CEF$ și $ABF$;

**b)** ariilor triunghiurilor $CEF$ și $ABF$.

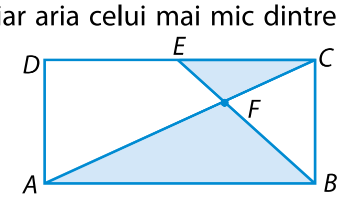


Fig. 5

**6** Dan dorește să determine înălțimea unui copac, folosind o oglindă așezată astfel încât să vadă în ea vârful copacului. Folosind datele din figura 6, ajută-l pe Dan să determine înălțimea copacului.

**7** Calculează de la ce înălțime trebuie să lovească Ana mingea de tenis pentru ca aceasta să atingă fileul și să aterizeze în terenul advers la 9 m de fileu (figura 7).

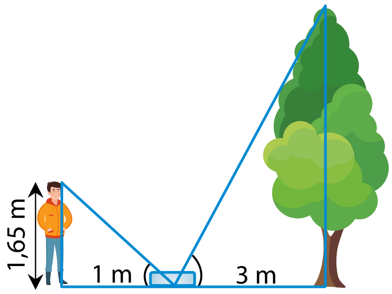


*Fig. 6*

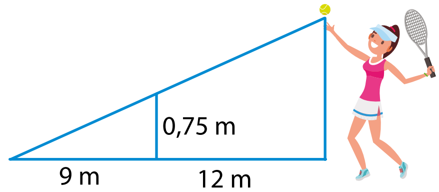


*Fig. 7*

**8** Terenul de joacă din curtea școlii este iluminat de un bec amplasat pe un stâlp la înălțimea de 4,86 m. Maria are înălțimea de 1,62 m și se află la distanța de 6,48 m de stâlp. Determină lungimea umbrei Mariei (figura 8).

**9** Figura 9 reprezintă schița unei pensiuni. Suprafața colorată reprezintă spațiul verde. Știind că *ABCD* este pătrat, cu $AB = 24$ m, punctul *E* este mijlocul laturii *AD* și $\sphericalangle CEF = 90°$, calculează aria suprafeței destinate spațiului verde.

**10** În figura 10, sunt reprezentate un copac, un om și umbrele acestora. Calculează înălțimea copacului, știind că umbra acestuia este de 6 m, înălțimea omului este de 1,8 m și umbra omului este de 1,2 m.

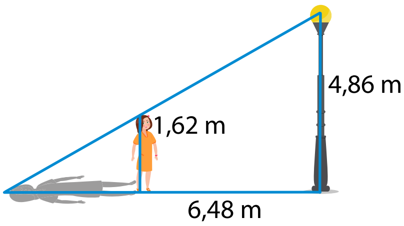


*Fig. 8*

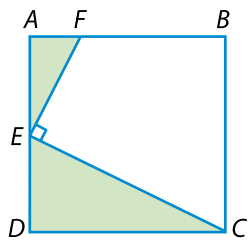


*Fig. 9*

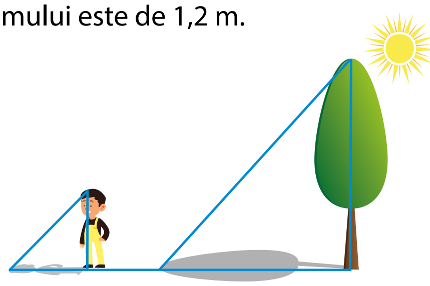


*Fig. 10*

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

**a)** Raportul perimetrelor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare. **A F**

**b)** Raportul medianelor corespunzătoare laturilor omoloage a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare. **A F**

**c)** Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare. **A F**

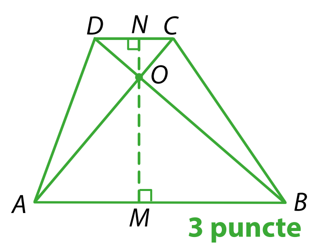
**d)** Raportul înălțimilor corespunzătoare laturilor omoloage a două triunghiuri asemenea este egal cu raportul de asemănare. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Suprafața mărginită de trapezul *ABCD* din figura de mai jos, cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$, este un teren agricol. Suprafața triunghiulară *AOB* este cultivată cu roșii, suprafețele triunghiulare *AOD* și *BOC* sunt cultivate cu castraveți, respectiv cu ardei, iar suprafața triunghiulară *COD* este cultivată cu vinete. Dacă $AB = 240$ m, $CD = 80$ m și aria suprafeței cultivate cu roșii este de 72 ari, atunci:

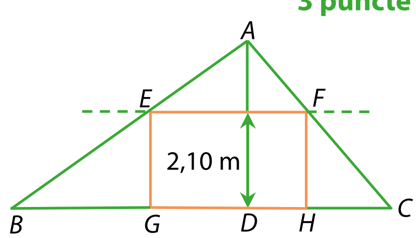
**a)** distanța, în m, de la *O* la dreapta *AB* este de …
**b)** distanța, în m, de la *O* la dreapta *CD* este de …
**c)** aria, în $dam^2$, a suprafeței cultivate cu vinete este de …
**d)** aria, în $dam^2$, a suprafeței cultivate cu ardei este de …

**1)** 8;
**2)** 24;
**3)** 20;
**4)** 60;
**5)** 12.




**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

Imaginea alăturată reprezintă schița podului casei părinților lui Luca. Luca își dorește o cameră pentru lectură. Din acest motiv, părinții lui au hotărât să amenajeze această cameră la mansardă și înălțimea acestei camere să fie de 2,10 m. Dacă $BC = 12$ m și $AD = 3,15$ m, atunci camera de lectură a lui Luca are lungimea de ☐ m.



# EVALUARE: ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

## 1. PROBLEME RECAPITULATIVE

**1** Punctul $M$ se află pe latura $AC$ a triunghiului dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$ (figura 1). Știind că $\sphericalangle AMB = 90° - \sphericalangle ACB$ și $AB = 2AM$, demonstrează că $MC = 3AM$.

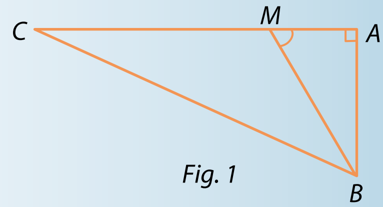



Fig. 1

**2** Punctele $M$ și $N$ sunt mijloacele laturilor $AB$, respectiv $AC$ ale unui triunghi $ABC$. Demonstrează că segmentele:

**a)** $AM$ și $MB$ sunt proporționale cu segmentele $AN$, respectiv $NC$;

**b)** $AB$ și $AM$ sunt proporționale cu segmentele $AC$, respectiv $AN$;

**c)** $AM$, $MB$, $AB$ sunt proporționale cu segmentele $AN$, $NC$, respectiv $AC$.

**3** Diagonalele unui trapez dreptunghic $ABCD$ se intersectează în punctul $O$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$. Dacă $M$ este un punct pe latura $AD$, astfel încât $\Delta ABM \sim \Delta DCM$, demonstrează că:

**a)** $MO \parallel AB$;

**b)** $MO$ este bisectoarea unghiului $BMC$.

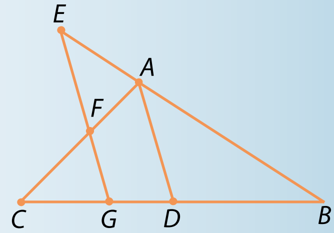



Fig. 2

**4** Punctul $D$ aparține laturii $BC$ a unui triunghi $ABC$. O paralelă la dreapta $AD$ intersectează dreptele $AB$, $AC$ și $BC$ respectiv în punctele $E$, $F$ și $G$ (figura 2). Dacă $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$, demonstrează că punctul $D$ este mijlocul laturii $BC$.

**5** Bisectoarea unghiului $A$ a triunghiului $ABC$ intersectează latura $BC$ în punctul $D$.

**a)** Știind că $AB = 28$ cm, $BC = 35$ cm și $CA = 42$ cm, calculează lungimile segmentelor $BD$ și $CD$.

**b)** Știind că $BD = 15$ cm, $BC = 33$ cm și $AB = 30$ cm, determină lungimile segmentelor $CD$ și $AC$.

**6** Pe o dreaptă considerăm punctele $A$, $B$, $C$ și $D$, în această ordine, astfel încât $AB = BC = CD$ și notăm cu $O$ mijlocul segmentului $AB$. Demonstrează că segmentele:

**a)** $AB$, $OB$, $AD$ și $OC$ sunt proporționale;

**b)** $BD$, $AD$, $BC$ și $OC$ sunt proporționale.

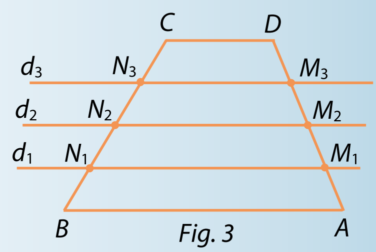



Fig. 3

**7** Se consideră un trapez $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, și paralelele echidistante $d_1$, $d_2$, $d_3$ care intersectează laturile $AD$, respectiv $BC$ în punctele $M_1$, $M_2$, $M_3$, respectiv $N_1$, $N_2$, $N_3$ (figura 3).

**a)** Dacă $AM_1 = 5$ cm, calculează lungimile segmentelor $AM_2$, $AM_3$, $AD$ și $M_2D$.

**b)** Dacă $BC = 28$ cm, calculează lungimile segmentelor $BN_3$, $N_1N_3$, $N_1C$, $BN_1$.

**8** Punctele $E$ și $F$ aparțin laturii $CD$ a dreptunghiului $ABCD$, astfel încât $CE = 24$ cm, $DF = 32$ cm. Dreptele $AE$ și $BF$ intersectează dreptele $BC$, respectiv $AD$ în punctele $G$ și $H$ (figura 4). Lungimile laturilor dreptunghiului sunt $AB = 96$ cm și $BC = 60$ cm.

**a)** Calculează lungimile segmentelor $BG$ și $AH$.

**b)** Dacă $AE \cap BF = \{M\}$, calculează distanța de la punctul $M$ la dreapta $AB$.

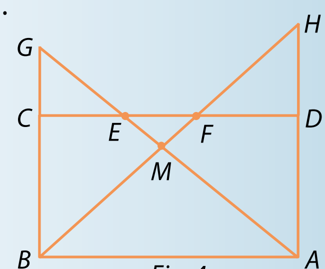



Fig. 4

**9** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Dacă o dreaptă $d$ intersectează dreptele $AB$, $BC$, $CD$ și $DA$ în punctul $M$, $N$, $P$, respectiv $Q$, diferite de vârfurile paralelogramului, demonstrează că $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1$.

**10** Diagonalele unui patrulater convex $ABCD$ sunt concurente în punctul $O$. Pe segmentele $AC$ și $BD$ se iau punctele $E$ și, respectiv, $F$ (figura 5).

**a)** Dacă $AD \parallel BE$ și $DC \parallel EF$, demonstrează că $BC \parallel AF$.

**b)** Dacă $AD \parallel BE$ și $BC \parallel AF$, demonstrează că $DC \parallel EF$.

**c)** Dacă $BC \parallel AF$ și $DC \parallel EF$, demonstrează că $AD \parallel BE$.

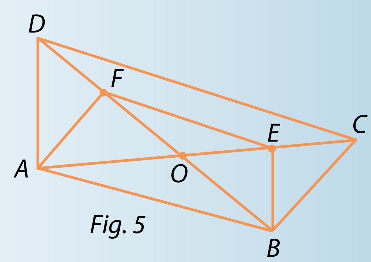



Fig. 5

# 2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

(5p) 1. Dacă punctul $M$ aparține segmentului $AB$ și $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$, atunci $\frac{MB}{AB}= \dots$ .

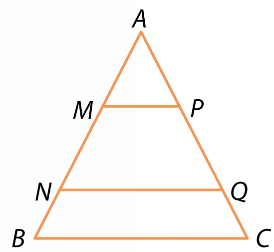
(5p) 2. Raportul de asemănare a două triunghiuri este egal cu $\frac{1}{5}$. Raportul ariilor celor două triunghiuri este egal cu … .

(5p) 3. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta CAB$, atunci triunghiul $ABC$ este triunghi … .

(5p) 4. Dacă două triunghiuri sunt asemenea, atunci laturile lor sunt … și unghiurile lor sunt … .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**
În figura de mai jos, punctele $M$, $N$, $P$, $Q$ se află pe laturile triunghiului $ABC$, astfel încât $MP \parallel NQ$ și $NQ \parallel BC$. Dacă $AM = 4$ cm, $MN = 6$ cm, $NB = 2$ cm, $BC = 18$ cm și $AC = 24$ cm, atunci lungimea segmentului:

| A | B |
|---|---|
| (5p) 1. $MP$ este egală cu … | a) 15 cm; |
| (5p) 2. $NQ$ este egală cu … | b) 8 cm; |
| (5p) 3. $AP$ este egală cu … | c) 6 cm; |
| (5p) 4. $PQ$ este egală cu … | d) 14 cm; |
| | e) 12 cm. |




**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Punctele $A$, $B$, $C$, $D$, în această ordine, aparțin unei drepte. Dacă lungimile segmentelor $AB$, $BC$ și $CD$ sunt direct proporționale cu numerele 4, 2 și 3, atunci:
A. $CD < BC < AB$; B. $AB < BC < CD$; C. $BC < CD < AB$; D. $AB < CD < BC$.

(5p) 2. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ și raportul de asemănare este egal cu 1, atunci triunghiurile sunt:
A. dreptunghice; B. congruente; C. isoscele; D. echilaterale.

(5p) 3. Dacă $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $AB = 6$ cm, $DE = 3$ cm și $\mathcal{A}_{ABC} = 24$ cm$^2$, atunci $\mathcal{A}_{DEF}$ este egală cu:
A. 6 cm$^2$; B. 24 cm$^2$; C. 48 cm$^2$; D. 8 cm$^2$.

(5p) 4. Dacă triunghiurile $ABC$ și $MNP$ au $AB = 6$ dm, $BC = 1$ m, $AC = 8$ dm, $MN = 30$ cm, $\sphericalangle M = 90°$ și $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle N$, atunci $\mathcal{A}_{MNP}$ este egală cu:
A. 60 dm$^2$; B. 240 cm$^2$; C. 48 cm$^2$; D. 600 cm$^2$.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

IV. Se consideră un triunghi $ABC$ și un punct $D$ pe latura $AC$. Pe semidreapta opusă semidreptei $CA$, se ia un punct $M$. Paralela prin punctul $D$ la dreapta $AB$ intersectează dreapta $BC$ în punctul $P$. Paralela prin punctul $M$ la dreapta $BC$ intersectează dreapta $DP$ în punctul $N$ și dreapta $AB$, în punctul $F$, iar paralela prin $F$ la dreapta $AC$ intersectează dreapta $DP$ în punctul $E$. Demonstrează că:

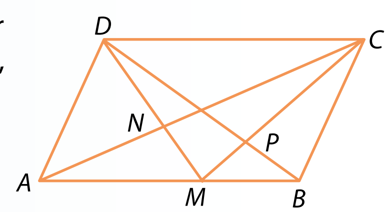
(15p) a) $ADEF$ este paralelogram; b) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FNE$; c) $\Delta ABC \sim \Delta ENF$.

V. Patrulaterul $ABCD$ din figura alăturată este paralelogram, iar punctul $M$ se află pe latura $AB$. Dacă $AC \cap DM = \{N\}$ și $BD \cap CM = \{P\}$, demonstrează că:

(5p) a) $\Delta MNA \sim \Delta DNC$;

(5p) b) $\Delta BPM \sim \Delta DPC$;

(5p) c) $\frac{AN}{CN}+\frac{BP}{DP}=1$.

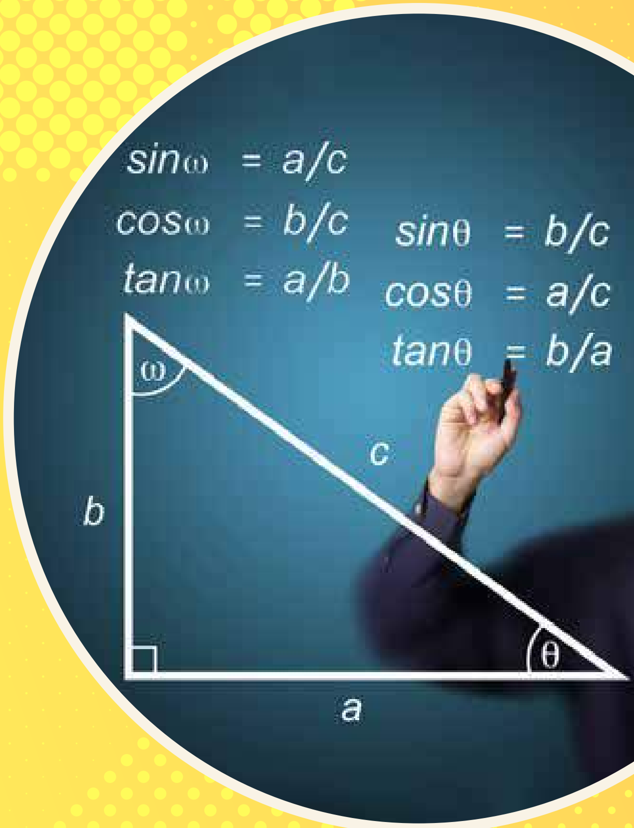



Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# 7

# RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC




**Unitatea: Relații metrice în triunghiul dreptunghic**

L1. Proiecții ortogonale. Teorema înălțimii. Teorema catetei
L2. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora
L3. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic
L4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic
L5. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat
L6. Aproximarea în situații practice a distanțelor folosind relații metrice

**Evaluare: Relații metrice în triunghiul dreptunghic**

1. Probleme recapitulative
2. Test de evaluare

# UNITATEA: RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

## LECȚIA 1 Proiecții ortogonale. Teorema înălțimii. Teorema catetei

### Ne amintim

- definiția perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă;
- definiția triunghiurilor asemenea și criteriile de asemănare;
- media geometrică a două numere pozitive.

### Observăm și descoperim cunoștințe noi

În figura 1, punctul $A'$ este *piciorul perpendicularei din punctul A pe dreapta d*. Se mai spune că punctul $A'$ este proiecția ortogonală a punctului $A$ pe dreapta $d$. Notăm $A' = pr_d A$.

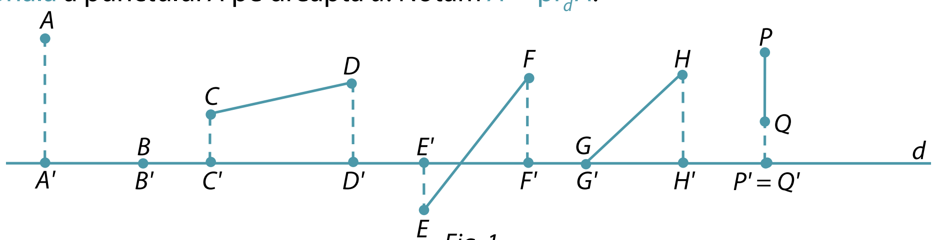



*Fig. 1*

Dacă un punct aparține dreptei $d$, de exemplu, punctul $B$, proiecția sa ortogonală pe dreaptă este identică cu punctul, adică $pr_d B = B' = B$ (figura 1).

Proiecția ortogonală a unui segment $AB$ pe o dreaptă este segmentul determinat de proiecțiile ortogonale ale punctelor $A$ și $B$ (capetele segmentului) pe dreaptă.

*Exemple:*

În figura 1, segmentul $C'D'$ este proiecția ortogonală a segmentului $CD$ pe dreapta $d$. Scriem $C'D' = pr_d CD$.

De asemenea, $E'F' = pr_d EF$ și $G'H' = GH' = pr_d GH$. Dacă segmentul este perpendicular pe dreaptă, cum este cazul segmentului $PQ$, proiecția ortogonală a segmentului se reduce la un punct, deci $pr_d PQ = P' = Q'$.

*Alte exemple:*

Pentru orice triunghi dreptunghic $ABC$, observăm existența a șase segmente: *cateta AB*, *cateta AC*, *ipotenuza BC*, *înălțimea AD* ($D \in BC$) și segmentele $BD$ și $DC$ (figura 2). Despre înălțimea $AD$ se spune că este înălțimea corespunzătoare *ipotenuzei*. Se observă că proiecția catetei $AB$ pe ipotenuza $BC$ este segmentul $BD$ ($pr_{BC} AB = BD$) și proiecția catetei $AC$ pe ipotenuza $BC$ este segmentul $DC$ ($pr_{BC} AC = DC$). Segmentele $BD$ și $DC$ sunt segmentele determinate de înălțimea $AD$ pe ipotenuza $BC$.

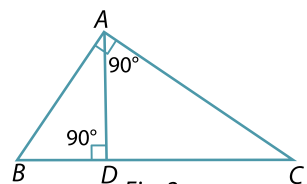



*Fig. 2*

### Rezolvăm împreună

**PROBLEMA 1**

În figura 3, lungimile segmentelor $AB$, $CD$ și $DE$ sunt: $AB = 2,4$ cm, $CD = 3,2$ cm și $DE = 1,8$ cm. Arată că lungimea segmentului $AB$ este egală cu media geometrică a lungimilor segmentelor $CD$ și $DE$.

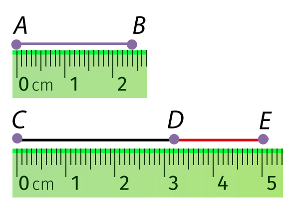



*Fig. 3*

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Media geometrică a lungimilor segmentelor $CD$ și $DE$ este egală cu:

$\sqrt{CD \cdot DE} = \sqrt{3,2 \cdot 1,8} = \sqrt{5,76} = \sqrt{\dfrac{576}{100}} = 2,4$. Din $AB = 2,4$ cm rezultă că $AB = \sqrt{CD \cdot DE}$, deci *lungimea segmentului AB este egală cu media geometrică a lungimilor segmentelor CD și DE.*

**Observație:** Egalitatea $AB = \sqrt{CD \cdot DE}$ este echivalentă cu egalitatea $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CD}{AB}$, care arată că segmentele $AB$ și $CD$ sunt respectiv proporționale cu segmentele $DE$ și $AB$. Din acest motiv, se spune că *lungimea segmentului AB este media proporțională a lungimilor segmentelor CD și DE.*

## Problema 2

Dacă $AD$ este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei $BC$ a unui triunghi dreptunghic $ABC$ ($D \in BC$), demonstrează că: **a)** $AD^2 = BD \cdot DC$; **b)** $AB^2 = BD \cdot BC$ și $AC^2 = CD \cdot BC$.

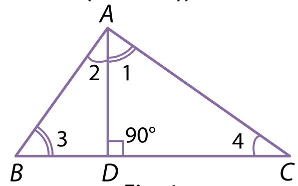


*Fig. 4*

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

**a)** Construim figura geometrică corespunzătoare enunțului (figura 4). Deoarece triunghiurile $BAC$ și $BDA$ sunt dreptunghice, rezultă că $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 90°$ și $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 90°$. Altfel spus, unghiurile 3 și 1 au același complement, deci sunt unghiuri congruente, adică $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$. Deoarece triunghiurile $ABD$ și $CAD$ sunt dreptunghice și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CAD$, din *criteriul de asemănare UU* rezultă că $\Delta ABD \sim \Delta CAD$ și din definiția asemănării obținem $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD}$ și $AD^2 = BD \cdot DC$. Demonstrația arată că lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este media proporțională a lungimilor segmentelor determinate de înălțime pe ipotenuză.

**b)** Se observă că unghiurile 2 și 4 sunt congruente, deoarece au același complement (unghiul 1). Din *criteriul de asemănare UU* rezultă că $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ și $\Delta ABC \sim \Delta DAC$. Folosind definiția asemănării, din $\Delta ABC \sim \Delta DBA$ rezultă că $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$, adică $AB^2 = BD \cdot BC$, iar din $\Delta ABC \sim \Delta DAC$ rezultă că $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD}$, adică $AC^2 = CD \cdot BC$. Demonstrația arată că oricare ar fi un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este egală cu media proporțională dintre lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției acelei catete pe ipotenuză.

**Știai că...:** Preocupările pentru geometria triunghiului dreptunghic sunt foarte vechi, de aproximativ patru milenii. Există dovezi istorice în acest sens. O dovadă este **tăblița de lut** aflată la Universitatea din Columbia, despre care se crede că a fost scrisă în jurul anului 1800 î.H. și care are un tabel de 4 coloane și 15 rânduri de numere care conțin *numere pitagoreice* (triplet de numere naturale care verifică teorema lui Pitagora).

### Reține!

- **Definiție:**
  Se numește **proiecție ortogonală a unui punct pe o dreaptă** piciorul perpendicularei din acel punct pe dreaptă.
- **Proprietăți ale proiecției ortogonale:**
  - Dacă un punct aparține unei drepte, proiecția punctului pe acea dreaptă coincide cu punctul.
  - Proiecția ortogonală a unui segment $AB$ pe o dreaptă este segmentul determinat de proiecțiile ortogonale ale punctelor $A$ și $B$ pe dreaptă.
  - Proiecția ortogonală a unui segment $AB$ pe o dreaptă $d$ este un punct dacă și numai dacă $AB \perp d$.
- **Teorema înălțimii**
  Lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este media proporțională a lungimilor segmentelor determinate de înălțime pe ipotenuză.
- **Teorema catetei**
  Oricare ar fi un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este egală cu media proporțională dintre lungimea ipotenuzei și lungimea proiecției acelei catete pe ipotenuză.

## Aplicăm cunoștințele

## Problema 1

În figura 5, triunghiul $ABC$ este isoscel, cu $AB = AC$, $AD \perp BC$, $CE \perp AB$, $D \in BC$, $E \in AB$, iar $F$ este proiecția punctului $D$ pe latura $AB$. Dacă $CE = 20$ cm și proiecția segmentului $BD$ pe latura $AB$ are lungimea de 5 cm, calculează lungimea laturii $AB$.

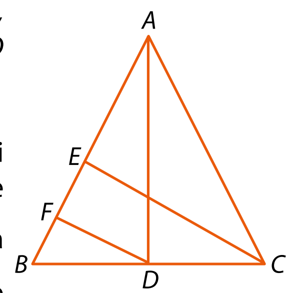


*Fig. 5*

***Demonstrație*** *(activitate pe grupe):*

Deoarece $F$ este proiecția punctului $D$ pe latura $AB$, rezultă că $DF \perp AB$. Din $DF \perp AB$ și $CE \perp AB$ rezultă că $DF \parallel CE$. Deoarece $D$ este mijlocul segmentului $BC$, rezultă că $DF$ este linia mijlocie a triunghiului $BCE$ și, prin urmare, $DF = \frac{1}{2} \cdot CE = 10$ cm. Aplicăm teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic $DAB$ și obținem $DF^2 = BF \cdot AF$, adică $100 = 5 \cdot AF$, de unde $AF = 20$ cm. Deci, $AB = BF + AF = 25$ cm.

## PROBLEMA 2

Se consideră un triunghi dreptunghic $ABC$ (figura 6), cu ipotenuza $BC$, înălțimea $AD$, $D \in BC$, $AB = c$ cm, $AC = b$ cm și $BD = p$ cm. În exteriorul triunghiului, se construiesc pătratul $ABEF$ și dreptunghiul $BCGH$, cu $BH \equiv AC$. Dreapta $AD$ intersectează latura dreptunghiului $BCGH$ în punctul $I$, paralela prin punctul $H$ la dreapta $AB$ intersectează dreapta $AD$ în punctul $J$, iar punctul $L$ este proiecția punctului $C$ pe dreapta $BE$. Demonstrează că:

**a)** $\Delta ABH \equiv \Delta EBC$;

**b)** patrulaterul $FELC$ este dreptunghi;

**c)** aria pătratului $ABEF$ este egală cu dublul ariei triunghiului $EBC$;

**d)** patrulaterul $ABHJ$ este paralelogram și are aria egală cu $b \cdot p$ cm$^2$;

**e)** aria pătratului $ABEF$ este egală cu aria paralelogramului $ABHJ$.

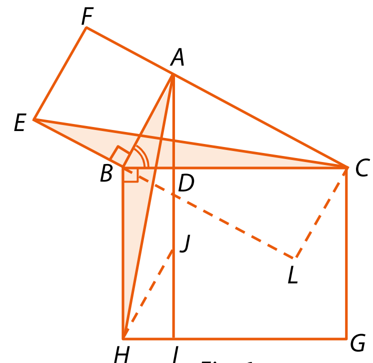


*Fig. 6*

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

**a)** Deoarece $\sphericalangle ABH = 90° + \sphericalangle ABC = \sphericalangle EBC$, $AB = EB = c$ cm și $BH = AC = b$ cm, conform definiției triunghiurilor congruente, rezultă că $\Delta ABH \equiv \Delta EBC$ (criteriul LUL).

**b)** Patrulaterul $FELC$ este dreptunghi, deoarece unghiurile $F$, $E$ și $L$ sunt unghiuri drepte.

**c)** Conform punctului precedent și enunțului, rezultă că $CL \perp EB$, $L \in EB$, și $CL = EF = EB = AB = c$ cm. Prin urmare, triunghiul $EBC$ are baza $EB = c$ cm, înălțimea $CL = c$ cm și $2 \cdot \mathcal{A}_{EBC} = c^2 = \mathcal{A}_{ABEF}$.

**d)** Patrulaterul $ABHJ$ este paralelogram, deoarece are laturile opuse paralele. Cum $BD \perp AJ$, $D \in AJ$, rezultă că înălțimea paralelogramului este $BD = p$ și baza este $AJ = BH = b$, deci $\mathcal{A}_{ABHJ} = b \cdot p$ cm$^2$.

**e)** Conform punctului a), $\Delta ABH \equiv \Delta EBC$ și, deoarece $ABHJ$ este paralelogram, rezultă că $\Delta ABH \equiv \Delta HJA$. Deci, $\mathcal{A}_{ABHJ} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABH} = 2 \cdot \mathcal{A}_{EBC}$ și din $2 \cdot \mathcal{A}_{EBC} = c^2 = \mathcal{A}_{ABEF}$ rezultă că $\mathcal{A}_{ABHJ} = \mathcal{A}_{ABEF}$.

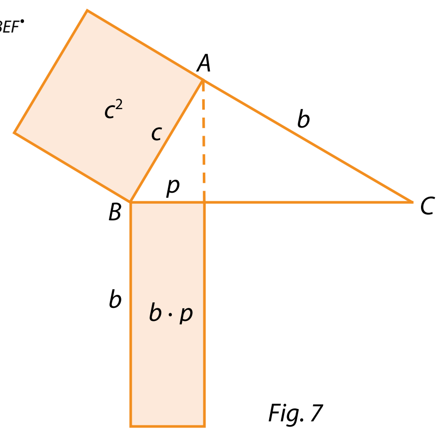


*Fig. 7*

**Observație:** Deoarece $\mathcal{A}_{ABHJ} = b \cdot p$ cm$^2$, $\mathcal{A}_{ABEF} = c^2$ și $\mathcal{A}_{ABHJ} = \mathcal{A}_{ABEF}$, rezultă că $c^2 = b \cdot p$. Am obținut astfel o altă demonstrație a *teoremei catetei*. Această demonstrație a fost dată de matematicianul grec **Euclid** (cca 323-283 î.H.). De aceea, teorema catetei se mai numește și teorema lui Euclid (figura 7).

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** În triunghiul $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, construim înălțimea $AD$, $D \in BC$. Precizează:
**a)** $pr_{AC} AB$; **b)** $pr_{AB} AC$; **c)** $pr_{BC} AB$; **d)** $pr_{BC} AC$.

**2** Se consideră un dreptunghi $ABCD$. Precizează:
**a)** $pr_{CD} AB$; **b)** $pr_{AD} BD$; **c)** $pr_{AB} AC$; **d)** $pr_{BC} CD$.

**3** Se consideră un pătrat $ABCD$ și se notează cu $O$ punctul de intersecție a diagonalelor. Precizează:
**a)** $pr_{AD} AB$; **b)** $pr_{AC} AB$; **c)** $pr_{AC} BC$; **d)** $pr_{BD} BC$.

**4** Se notează cu $O$ punctul de intersecție a diagonalelor rombului $ABCD$. Precizează:
**a)** $pr_{AC} AB$; **b)** $pr_{BD} AB$; **c)** $pr_{AC} BC$; **d)** $pr_{BD} AD$.

**5** Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$ și $\sphericalangle A = 90°$. Precizează:
**a)** $pr_{AD} AB$; **b)** $pr_{AD} CD$; **c)** $pr_{AD} BC$; **d)** $pr_{AB} AD$.

**6** În triunghiul $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, construim înălțimea $AD$, $D \in BC$. Calculează lungimile segmentelor $AD$, $AB$ și $AC$, știind că:
**a)** $BD = 18$ cm și $CD = 32$ cm; **b)** $BD = 3$ cm și $CD = 12$ cm.

**7** În triunghiul $MNP$, cu $\sphericalangle M = 90°$, construim $MQ \perp NP$, $Q \in NP$. Știind că $MN = 3\sqrt{5}$ cm și $NQ = 3$ cm, calculează lungimile segmentelor:
**a)** $NP$; **b)** $MP$; **c)** $QP$; **d)** $MQ$.

**8** În triunghiul $MNP$, cu $\sphericalangle M = 90°$, construim $MQ \perp NP$, $Q \in NP$. Știind că $MQ = 4$ cm și $NQ = 4\sqrt{2}$ cm, calculează lungimile segmentelor:
**a)** $PQ$; **b)** $NP$; **c)** $MN$; **d)** $MP$.

**9** În triunghiul $DEF$, cu $\sphericalangle D = 90°$, construim înălțimea $DG$, $G \in EF$. Știind că $DE = 18$ cm și $EF = 27$ cm, calculează lungimile segmentelor:

**a)** $EG$; **b)** $FG$; **c)** $DG$; **d)** $DF$.

**10** În triunghiul $DEF$, cu $\sphericalangle D = 90°$, construim înălțimea $DG$, $G \in EF$. Știind că $DG = 20$ cm și $FG = 4EG$, calculează lungimea segmentelor:

**a)** $EG$; **b)** $FG$; **c)** $DE$; **d)** $DF$.

**11** Se notează cu $O$ punctul de intersecție a diagonalelor rombului $ABCD$. Știind că $AB = 26$ cm și lungimea proiecției segmentului $BO$ pe latura $AB$ este egală cu 8 cm, calculează:

**a)** lungimea proiecției segmentului $AO$ pe latura $AB$; **b)** înălțimea triunghiului $AOB$;
**c)** lungimile diagonalelor rombului $ABCD$; **d)** aria rombului $ABCD$.

**12** În dreptunghiul $ABCD$, se notează cu $E$ piciorul perpendicularei din $A$ pe $BD$ și cu $F$, intersecția dreptelor $AE$ și $BC$. Știind că $BE = 36$ cm și $DE = 16$ cm, calculează:

**a)** lungimile segmentelor $AE$, $EF$, $AB$, $AD$ și $BF$; **b)** ariile patrulaterelor $ABCD$ și $ABFD$.

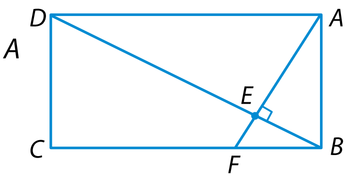
**13** În trapezul isoscel $MATE$, cu $MA \parallel TE$ și $MA > TE$, se știe că $AT \perp MT$. Știind că $AM = 45$ cm și $ET = 27$ cm, calculează perimetrul și aria:

**a)** trapezului $MATE$; **b)** triunghiului $MTE$.

**14** Știind că într-un triunghi $ABC$ înălțimea $AD$ este media proporțională a proiecțiilor laturilor $AB$, respectiv $AC$ pe $BC$ și că punctul $D$ este interior segmentului $BC$, demonstrează că triunghiul este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$.

**15** Știind că într-un triunghi $ABC$ proiecția punctului $A$ pe $BC$ este $D$ ($D \in BC$) și că $AB^2 = BC \cdot BD$, demonstrează că triunghiul $ABC$ este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$.

**16** În figura alăturată, $ABCD$ este dreptunghi, punctul $E$ este proiecția punctului $A$ pe dreapta $BD$ și cu $F$ se notează intersecția dreptelor $AE$ și $BC$. Demonstrează că:




**a)** $\dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2}$; **b)** $\Delta BCD \sim \Delta BEF$; **c)** $AB^2 = BC \cdot BF$.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

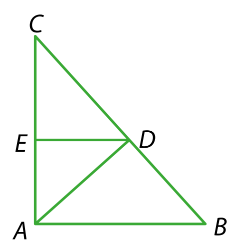
**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

Se consideră un trapez $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90°$. Diagonalele trapezului sunt perpendiculare și sunt concurente în punctul $O$. Paralela prin punctul $O$ la dreapta $AB$ intersectează laturile $AD$ și $BC$ în punctele $M$, respectiv $N$.

**a)** Proiecția punctului $O$ pe dreapta $AD$ este punctul $M$. **A** **F**
**b)** Proiecția segmentului $BN$ pe dreapta $AD$ este segmentul $AM$. **A** **F**
**c)** Proiecția diagonalei $AC$ pe dreapta $BD$ este segmentul $BD$. **A** **F**
**d)** Dacă lungimile proiecțiilor segmentelor $AB$ și $AD$ pe dreapta $BD$ sunt egale cu 2,5 cm, respectiv 1,5 cm, atunci lungimea diagonalei $BD$ nu este egală cu 4 cm. **A** **F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

În figura alăturată, triunghiul $ABC$ este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$, punctul $D$ este proiecția punctului $A$ pe dreapta $BC$, iar punctul $E$ este proiecția punctului $D$ pe dreapta $AC$. Dacă $BD = 18$ cm și $CD = 32$ cm, atunci:




| | |
|---|---|
| **a)** $AD = \dots$ | **1)** 40 cm; |
| **b)** $AC = \dots$ | **2)** 19,2 cm; |
| **c)** $\text{pr}_{AC} BD = \dots$ | **3)** 14,4 cm; |
| **d)** $DE = \dots$ | **4)** 24 cm; |
| | **5)** 30 cm. |

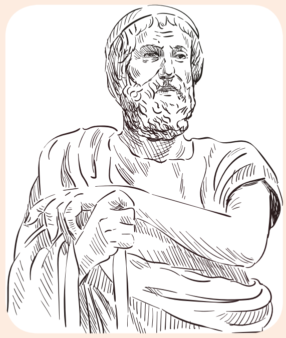
**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

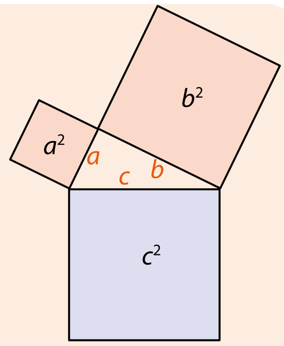
Punctul $D$ aparține laturii $BC$ a unui triunghi $ABC$ și $\Delta ABD \sim \Delta CAD$. Dacă $AD = 6$ cm și $CD = 9$ cm, atunci aria triunghiului $ABD$ este egală cu $\boxed{\phantom{000}}$ cm$^2$.

# LECȚIA 2 Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora

**Știai că...**

Datorită importanței pe care o are pentru calcule și demonstrații, **teorema lui Pitagora** este probabil cea mai cunoscută teoremă de geometrie plană. Descoperirea ei este atribuită lui **Pitagora din Samos**, un filozof și matematician grec (cca 580-496 î.H.). Pentru această teoremă se cunosc mai mult de 100 de demonstrații. Una dintre demonstrații este atribuită lui **Euclid**, care a arătat că între ariile pătratelor construite pe laturile unui triunghi dreptunghic există relația $a^2 + b^2 = c^2$.






## Ne amintim

- teorema catetei;
- proprietatea tangentei dintr-un punct la un cerc;
- măsura unghiului înscris în cerc;
- definiția triunghiurilor asemenea și criteriile de asemănare.

Pentru a rezolva unele probleme, am învățat să folosim teorema lui Pitagora și reciproca acesteia încă din clasa a VI-a. Este momentul să demonstrăm aceste teoreme. Pentru demonstrarea teoremei, folosim *teorema catetei*, iar, pentru demonstrarea reciprocei, folosim o construcție ajutătoare.

## Rezolvăm împreună

**Teorema lui Pitagora.** Pătratul lungimii ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Notăm cu $D$ proiecția punctului $A$ pe ipotenuza $BC$ a unui triunghi dreptunghic $ABC$ (figura 1). Rezultă că punctul $D$ este pe latura $BC$, iar segmentele $BD$ și $CD$ sunt proiecțiile catetelor $AB$, respectiv $AC$ pe ipotenuză și $BD + DC = BC$. Folosind teorema catetei, obținem $AB^2 = BD \cdot BC$ și $AC^2 = DC \cdot BC$, de unde succesiv obținem:

$$AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + DC \cdot BC \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = (BD + DC) \cdot BC \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC \cdot BC \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

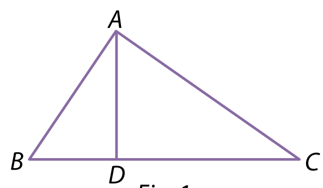


*Fig. 1*

**Reciproca teoremei lui Pitagora.** Dacă pătratul lungimii unei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic, având ca ipotenuză latura respectivă.

***Demonstrație*** *(activitate frontală):*

Dacă între laturile unui triunghi $ABC$ există relația $AB^2 + AC^2 = BC^2$, arătăm că triunghiul $ABC$ este dreptunghic și că *unghiul care se opune laturii BC*, adică unghiul *BAC*, *este drept* (figura 2).

Folosim următoarea construcție ajutătoare: în punctul $A$ construim perpendiculara pe dreapta $AC$, astfel încât punctele $B$ și $D$ să fie de o parte și de alta a dreptei $AC$ și $AD = AB$. Din construcție rezultă că $\sphericalangle DAC = 90°$. Deoarece triunghiul $CAD$ este dreptunghic și are ipotenuza $DC$, aplicând teorema lui Pitagora, rezultă că $AD^2 + AC^2 = CD^2$. Cum $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (din enunț), rezultă că $CD^2 = BC^2$, adică $CD = BC$. Având laturile congruente, triunghiurile $ABC$ și $ADC$ sunt congruente și din congruența lor rezultă că $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = 90°$.

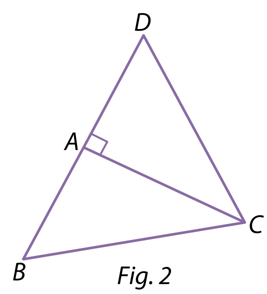


*Fig. 2*

## Reține!

- **Teorema lui Pitagora**
  Pătratul lungimii ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.
- **Reciproca teoremei lui Pitagora**
  Dacă pătratul lungimii unei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic, având ca ipotenuză latura respectivă.

## Aplicăm cunoștințele

Un punct *A* este exterior unui cerc cu centrul *O* și raza $r = 3$ cm. Punctele de intersecție a secantei *AO* cu cercul se notează cu *B* și *C*, punctul *C* fiind pe segmentul *AO*. Lungimea tangentei din punctul *A* la cerc este egală cu 4 cm. Punctele de intersecție a unei secante din *A* la cerc se notează cu *M* și *N*. Demonstrează că produsul $AM \cdot AN$ este constant.

***Demonstrație*** *(activitate pe grupe):*

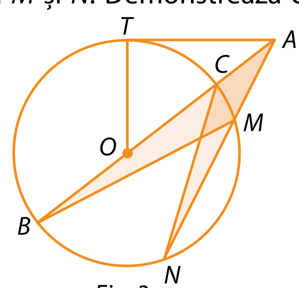


*Fig. 3*

Folosind instrumentele geometrice, construim figura. Construim din punctul *A* o tangentă la cerc și notăm cu *T* punctul de tangență (figura 3). Deoarece $OT \perp TA$ (proprietatea tangentei dintr-un punct la cerc), rezultă că triunghiul *OTA* este dreptunghic, cu ipotenuza *AO*. Aplicând teorema lui Pitagora, obținem $OA^2 = OT^2 + AT^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, de unde $OA = 5$ cm. Deoarece *OC* este rază și *BC* este diametru, rezultă că $AC = 2$ cm și $AB = 8$ cm.

Observăm că $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ANC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CM}$ (proprietatea măsurii unui unghi înscris în cerc). Deoarece triunghiurile *ABM* și *ANC* au $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ANC$ și $\sphericalangle BAM = \sphericalangle NAC$, rezultă că $\Delta ABM \sim \Delta ANC$ (criteriul UU) și $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AN}$, de unde obținem $AM \cdot AN = AB \cdot AC = 16$ cm$^2$, adică produsul $AM \cdot AN$ este constant.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Triunghiul *ABC* este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$. Calculează lungimea laturii *BC*, știind că:

**a)** $AB = 12$ cm și $AC = 6\sqrt{5}$ cm; **b)** $AB = 10$ cm și $AC = 5\sqrt{3}$ cm.

**2** Triunghiul *MNP* este dreptunghic, cu $\sphericalangle M = 90°$. Calculează lungimea laturii *MN*, știind că:

**a)** $MP = 20$ cm și $NP = 52$ cm; **b)** $MP = 6\sqrt{3}$ cm și $NP = 12$ cm.

**3** Determină măsura unghiului *D* al triunghiului *DEF*, știind că:

**a)** $DE = 10$ cm, $DF = 24$ cm și $EF = 26$ cm; **b)** $DE = DF = 10$ cm și $EF = 10\sqrt{2}$ cm.

**4** Calculează lungimea înălțimii și aria unui triunghi echilateral, știind că lungimea laturii este egală cu:

**a)** 12 cm; **b)** $6\sqrt{3}$ cm; **c)** $8\sqrt{6}$ cm.

**5** Calculează lungimea diagonalei și aria unui pătrat, știind că lungimea laturii pătratului este de:

**a)** 6 cm; **b)** $8\sqrt{2}$ cm; **c)** *n* cm.

**6** Calculează aria unui triunghi isoscel *ABC*, știind că:

**a)** $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm; **b)** $AB = AC = 100$ cm și $BC = 120$ cm.

**7** Calculează lungimea diagonalei unui dreptunghi, știind că lungimile laturilor sale sunt egale cu:

**a)** 20 cm, respectiv 21 cm; **b)** 3 cm, respectiv $6\sqrt{2}$ cm.

**8** Calculează perimetrul și aria unui romb, știind că lungimile diagonalelor sale sunt egale cu:

**a)** 48 cm, respectiv 36 cm; **b)** 12 cm, respectiv $12\sqrt{3}$ cm.

**9** Paralelogramul *ABCD* (figura 4) are $AB = 40$ cm, $BC = 30$ cm și $\sphericalangle BCD = 60°$. Calculează:

**a)** lungimile segmentelor *AE*, *EB* și *DE*;

**b)** perimetrul și aria trapezului *EBCD*.

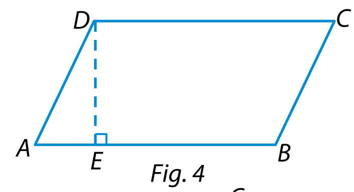


*Fig. 4*

**10** În figura 5, trapezul dreptunghic *ABCD*, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, are $AB = 16$ cm și $BC = CD = 10$ cm. Calculează:

**a)** lungimile segmentelor *AD*, *AC* și *BD*;

**b)** perimetrul și aria trapezului *ABCD*.

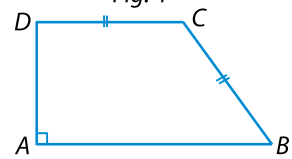


*Fig. 5*

**11** În figura 6, punctul *D* este proiecția punctului *A* pe latura *BC* a triunghiului *ABC*. Punctele *M* și *N* sunt situate pe segmentul *BD*, astfel încât $BM = CD$ și $AD^2 = DN \cdot MC$. Dacă punctul *P* este simetricul punctului *N* față de punctul *D*, demonstrează că $\sphericalangle BAP = 90°$.

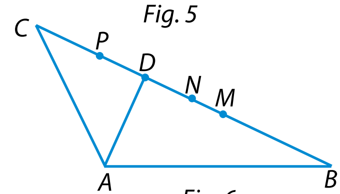


*Fig. 6*

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1 Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

**a)** Dacă $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm și $BC = 3\sqrt{5}$ cm, atunci triunghiul *ABC* este dreptunghic și vârful unghiului drept este în punctul *B*. **A** **F**

**b)** În cercul $\mathscr{C}(O, r)$, considerăm o coardă $AB = 12$ cm. Dacă $r = 10$ cm, atunci aria triunghiului *AOB* este egală cu 48 $cm^2$. **A** **F**

**c)** Triunghiul *ABC*, cu laturile $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm și $BC = 2\sqrt{13}$, nu este dreptunghic. **A** **F**

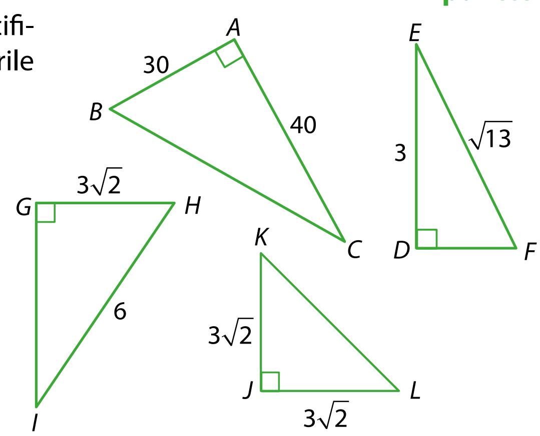
**d)** În cercul $\mathscr{C}(O, r)$, considerăm două raze perpendiculare, *OA* și *OB*. Dacă $r = 6\sqrt{2}$ cm, atunci distanța de la centrul cercului la coarda *AB* este egală cu 6 cm. **A** **F**

**2 Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Pentru fiecare triunghi dreptunghic alăturat sunt specificate unghiul drept și lungimile în centimetri a două dintre laturile triunghiului.

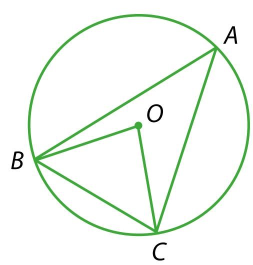
Lungimile segmentelor, exprimate în centimetri, sunt:

| | |
|---|---|
| **a)** $BC = \ldots$ | **1)** 6; |
| **b)** $DF = \ldots$ | **2)** 2; |
| **c)** $GI = \ldots$ | **3)** 50; |
| **d)** $KL = \ldots$ | **4)** $2\sqrt{6}$; |
| | **5)** $3\sqrt{2}$. |




**3 Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

În figura alăturată, triunghiul ascuțitunghic *ABC* este înscris în cercul $\mathscr{C}(O, r)$. Dacă $r = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = 12$ cm, atunci măsura unghiului *BAC* este egală cu $\boxed{\phantom{000}}$°.



# LECȚIA 3 Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic

## Ne amintim

- definiția triunghiurilor asemenea;
- criteriile de asemănare a triunghiurilor.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Orice triunghi are șase elemente: trei laturi și trei unghiuri. În cazul triunghiurilor dreptunghice, deoarece unul dintre unghiuri este drept, ne interesează celelalte cinci elemente ale triunghiului. În cele ce urmează, învățăm să rezolvăm următoarea problemă:

Fiind date două elemente ale unui triunghi dreptunghic, dintre care cel puțin o latură, să se calculeze celelalte trei elemente.

Să observăm că problema are întotdeauna soluție. Într-adevăr, deoarece cunoaștem două elemente, dintre care cel puțin o latură, putem construi triunghiul. Triunghiul odată construit, putem măsura celelalte trei elemente. Acest procedeu este anevoios și aproximativ. Pentru a putea rezolva problema formulată anterior, este necesar să introducem noțiuni noi, noțiuni de trigonometrie.

Trigonometria este o ramură a matematicii. Etimologia cuvântului (lb. greacă, *trigonos* = triunghi, *metron* = măsură) pune în evidență faptul că trigonometria se ocupă și de rezolvarea unor probleme asemănătoare celei formulate anterior.

### Sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi

Considerăm unghiul *hk,* un unghi ascuțit oarecare, și notăm cu $x$ măsura acestuia exprimată în grade ($\sphericalangle hk = x$). Deoarece unghiul este ascuțit, rezultă că $0° < x < 90°$. Evident, există mai multe triunghiuri dreptunghice care să aibă unul dintre unghiurile ascuțite congruente cu unghiul *hk* (figura 1).

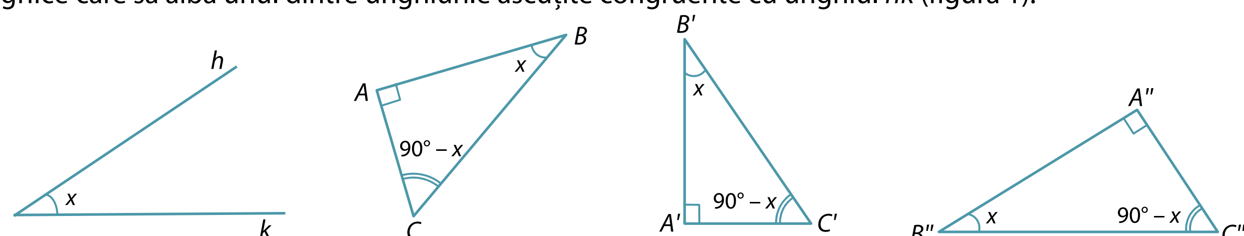



*Fig. 1*

Conform criteriului de asemănare UU, oricare două dintre aceste triunghiuri sunt asemenea. Fie, de exemplu, triunghiurile $ABC$ și $A'B'C'$. Atunci avem $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, de unde $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$. Din ultima egalitate rezultă că $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$, adică, pentru orice triunghi dreptunghic care are unul dintre unghiurile ascuțite congruente cu unghiul dat, numărul care se obține ca raport între lungimea catetei opuse acelui unghi și lungimea ipotenuzei este constant. Acest număr se numește sinusul unghiului *hk* sau sinus de $\sphericalangle hk$ sau sin de $x$ și se notează $\sin(\sphericalangle hk)$ sau $\sin x$.

Așadar, pentru oricare dintre triunghiurile dreptunghice din figura 1, $\sin(\sphericalangle hk) = \sin x = \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} = \frac{A''C''}{B''C''}$.

Dacă unghiul *h′k′* este complementul unghiului ascuțit *hk*, atunci $\sphericalangle h'k'$ este unghi ascuțit și are măsura de $90° - x$. Rezultă că $\sin(\sphericalangle h'k') = \sin(90° - x) = \sin(\sphericalangle ACB) = \frac{AB}{BC}$.

Dacă unghiul *hk* este un unghi ascuțit oarecare și notăm cu $x$ măsura acestuia exprimată în grade ($\sphericalangle hk = x$ și $0° < x < 90°$), definim:

- cosinusul unghiului ascuțit *hk*: $\cos(\sphericalangle hk) = \sin(90° - x)$ sau $\cos x = \sin(90° - x)$;
- tangenta și cotangenta unghiului ascuțit *hk*:

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle hk) = \frac{\sin(\sphericalangle hk)}{\cos(\sphericalangle hk)} \text{ și } \operatorname{ctg}(\sphericalangle hk) = \frac{\cos(\sphericalangle hk)}{\sin(\sphericalangle hk)} \text{ sau } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ și } \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

## Rezolvăm împreună

Pentru un triunghi oarecare $ABC$ (figura 2), se admit următoarele convenții privind lungimea laturilor și măsura unghiurilor, exprimată în grade:

- lungimea laturii care se opune vârfului $A$ se notează cu $a$, lungimea laturii care se opune vârfului $B$ se notează cu $b$ și lungimea laturii care se opune vârfului $C$ se notează cu $c$, adică $BC = a$, $AC = b$ și $AB = c$;
- măsurile unghiurilor, exprimate în grade, se notează astfel: $\sphericalangle A = A$, $\sphericalangle B = B$ și $\sphericalangle C = C$.

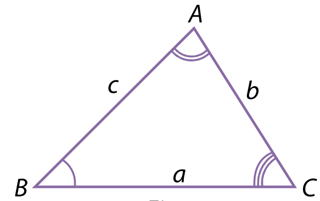


*Fig. 2*

### PROBLEMA 1

Pentru un triunghi dreptunghic $ABC$, cu $A = 90°$, se notează cu $x$ măsura unuia dintre unghiurile ascuțite ale triunghiului. Calculează sin $x$, cos $x$, tg $x$ și ctg $x$.

***Rezolvare** (activitate frontală):*

Alegem unghiul ascuțit, de exemplu, unghiul $ABC$ (figura 3). Rezultă că $\sphericalangle ABC = x$. Deoarece unghiurile $ABC$ și $ACB$ sunt complementare, rezultă că $\sphericalangle ACB = 90° - x$. Pentru lungimile laturilor, considerăm că $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Folosind definițiile sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei unui unghi, rezultă:

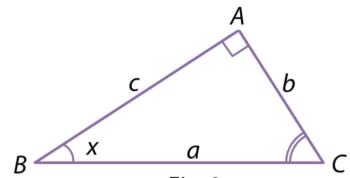


*Fig. 3*

$$\sin x = \frac{b}{a};\ \cos x = \sin(90° - x) = \sin(\sphericalangle ACB) = \frac{c}{a};\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} = \frac{b}{c};\ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b} = \frac{c}{b}.$$

Prin urmare, $\sin x = \frac{b}{a}$, $\cos x = \frac{c}{a}$, $\operatorname{tg} x = \frac{b}{c}$ și $\operatorname{ctg} x = \frac{c}{b}$, de unde se observă că sinusul, tangenta și cotangenta unghiului $ABC$, ascuțit și cu măsura $x$, pot fi exprimate cu ajutorul lungimilor catetelor și al lungimii ipotenuzei.

Astfel:
- sin($\sphericalangle ABC$) este raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea ipotenuzei;
- cos($\sphericalangle ABC$) este raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea ipotenuzei;
- tg($\sphericalangle ABC$) este raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea catetei alăturate unghiului;
- ctg($\sphericalangle ABC$) este raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea catetei opuse unghiului.

## ◆ Determinarea sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei unghiurilor de 30°, 45° sau 60°

### PROBLEMA 2

Calculează:

**a)** sin 30°, cos 30°, tg 30° și ctg 30°; **b)** sin 60°, cos 60°, tg 60° și ctg 60°.

***Rezolvare** (activitate individuală):*

Construim un triunghi dreptunghic $ABC$, care are un unghi de 30° și ipotenuza de lungime $a$ (figura 4). Din reciproca teoremei triunghiului 30-60-90 rezultă că $AC = \frac{a}{2}$. Cu teorema lui Pitagora, obținem $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și calculăm:

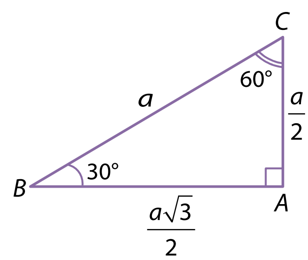


*Fig. 4*

**a)** $\sin 30° = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$; $\cos 30° = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg} 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg} 30° = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}$.

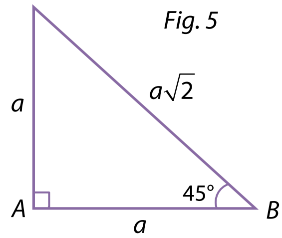
**b)** $\sin 60° = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60° = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} 60° = \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 60° = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

### PROBLEMA 3

Calculează: sin 45°, cos 45°, tg 45° și ctg 45°.

***Rezolvare** (activitate individuală):*

Considerăm un triunghi dreptunghic isoscel, cu catetele de lungime $a$ (figura 5).

*Fig. 5*


Conform teoremei lui Pitagora, $BC = a\sqrt{2}$ și rezultă:

$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1 \text{ și ctg } 45° = \frac{a}{a} = 1.$$

**Observație:** În rezolvarea unor probleme se pot folosi tabele trigonometrice pentru determinarea sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei unghiurilor.

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| sin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cos | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

| | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| tg | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| ctg | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## Reține!

Oricare ar fi un triunghi dreptunghic:

- **Sinusul** unui unghi ascuțit este egal cu raportul dintre lungimea catetei opuse unghiului și lungimea ipotenuzei.
- **Cosinusul** unui unghi ascuțit este egal cu raportul dintre lungimea catetei alăturate unghiului și lungimea ipotenuzei.
- **Tangenta** unui unghi ascuțit este egală cu raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea catetei alăturate unghiului.
- **Cotangenta** unui unghi ascuțit este egală cu raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea catetei opuse unghiului.

## Aplicăm cunoștințele

### Problema 1

Dacă $x$ este măsura unui unghi, exprimată în grade, și $0° < x < 90°$, justifică egalitățile:

**a)** $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, $\text{tg } x = \frac{1}{\text{ctg } x}$ și $\text{ctg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$;

**b)** $\sin x = \cos(90° - x)$, $\cos x = \sin(90° - x)$, $\text{tg } x = \text{ctg}(90° - x)$ și $\text{ctg } x = \text{tg}(90° - x)$.

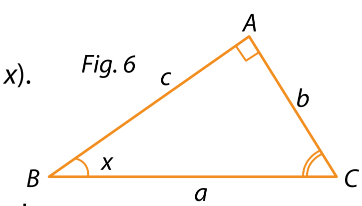


*Fig. 6*

***Rezolvare*** *(activitate pe grupe):*

Construim un triunghi dreptunghic $ABC$, cu $A = 90°$ și $\sphericalangle ABC = x$ (figura 6).

Rezultă că $\sphericalangle ACB = 90° - x$.

**a)** Conform teoremei lui Pitagora, avem $a^2 = b^2 + c^2$, iar conform problemei precedente, avem:

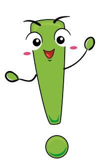
$\sin x = \frac{b}{a}$, $\cos x = \frac{c}{a}$, $\text{tg } x = \frac{b}{c}$ și $\text{ctg } x = \frac{c}{b}$. Rezultă: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$ și

$\text{tg } x \cdot \text{ctg } x = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1$. Din egalitatea $\text{tg } x \cdot \text{ctg } x = 1$ rezultă că $\text{tg } x = \frac{1}{\text{ctg } x}$ și $\text{ctg } x = \frac{1}{\text{tg } x}$.

**b)** Ținând cont că $\sin x = \frac{b}{a}$, $\cos x = \frac{c}{a}$, $\text{tg } x = \frac{b}{c}$, $\text{ctg } x = \frac{c}{b}$ și că $\sphericalangle ACB = 90° - x$, rezultă:

$\cos(90° - x) = \cos(\sphericalangle ACB) = \frac{b}{a} = \sin x$; $\sin(90° - x) = \sin(\sphericalangle ACB) = \frac{c}{a} = \cos x$;

$\text{tg}(90° - x) = \text{tg}(\sphericalangle ACB) = \frac{c}{b} = \text{ctg } x$; $\text{ctg}(90° - x) = \text{ctg}(\sphericalangle ACB) = \frac{b}{c} = \text{tg } x$.



**Important**

**1.** În loc de $(\sin x)^2$, $(\cos x)^2$, $(\text{tg } x)^2$ și $(\text{ctg } x)^2$ se scrie $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\text{tg}^2 x$ și $\text{ctg}^2 x$.

**2.** Egalitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ se numește **formula fundamentală a trigonometriei**.

**3. Sinusul unui unghi este egal cu cosinusul complementului său**, adică $\sin x = \cos(90° - x)$.

**4. Cosinusul unui unghi este egal cu sinusul complementului său**, adică $\cos x = \sin(90° - x)$.

**5. Tangenta unui unghi este egală cu cotangenta complementului său**, adică $\text{tg } x = \text{ctg}(90° - x)$.

**6. Cotangenta unui unghi este egală cu tangenta complementului său**, adică $\text{ctg } x = \text{tg}(90° - x)$.

## PROBLEMA 2

Se consideră un triunghi $ABC$, cu $AB = 15$ cm, $AC = 21$ cm și $\sin \sphericalangle A = \frac{4}{5}$. Calculează sinusul unghiului $C$.

***Rezolvare*** *(activitate pe grupe):*

Deoarece sinusul unui unghi este raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea ipotenuzei, trebuie să avem un triunghi dreptunghic care să conțină unghiul $A$. Notăm cu $B'$ proiecția punctului $B$ pe dreapta $AC$ ($BB' \perp AC$) și $\sin \sphericalangle A = \frac{BB'}{AB}$ (figura 7). Cum $\sin \sphericalangle A = \frac{4}{5}$ și $AB = 15$ cm, rezultă că $\frac{4}{5} = \frac{BB'}{15}$ și $BB' = \frac{4 \cdot 15}{5} = 12$ (cm).

În triunghiul $AB'B$, cu $\sphericalangle B' = 90°$, aplicăm teorema lui Pitagora: $AB^2 = B'B^2 + B'A^2$. Înlocuim $AB = 15$ cm și $BB' = 12$ cm și obținem $15^2 = 12^2 + B'A^2$, adică $B'A^2 = 81$ și $B'A = 9$ cm. Calculăm $B'C = AC - B'A = 21$ cm $- 9$ cm $= 12$ cm și triunghiul $BB'C$ este dreptunghic isoscel, deoarece $BB' = CB' = 12$ cm.

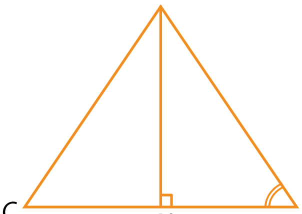


*Fig. 7*

În triunghiul dreptunghic isoscel $BB'C$, avem $\sphericalangle B'BC = \sphericalangle B'CB = 45°$ și $\sin(\sphericalangle ACB) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

## PROBLEMA 3

Într-un triunghi dreptunghic $ABC$ (figura 8), cu $\sphericalangle A = 90°$, se știe că $BC = 26$ cm și $\text{tg} \sphericalangle C = \frac{5}{12}$. Calculează perimetrul triunghiului $ABC$.

***Rezolvare*** *(activitate pe grupe):*

Deoarece tangenta unui unghi este raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea catetei alăturate, rezultă că $\text{tg} \sphericalangle C = \frac{AB}{AC}$. Cum $\text{tg} \sphericalangle C = \frac{5}{12}$, rezultă că $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$, de unde $\frac{AB}{5} = \frac{AC}{12} = k, k \in \mathbb{N}^*$. Deci, $AB = 5k$ și $AC = 12k$.

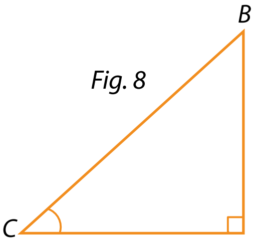


*Fig. 8*

În triunghiul $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, aplicăm teorema lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Înlocuind, obținem $26^2 = (5k)^2 + (12k)^2$, adică $676 = 169k^2$ și $k = 2$. Calculăm $AB = 5k = 10$ (cm), $AC = 12k = 24$ (cm) și perimetrul triunghiului este egal cu 10 cm + 24 cm + 26 cm = 60 cm.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Triunghiul dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, are $AC = 6$ cm și $BC = 10$ cm. Determină:
**a)** $\sin \sphericalangle B$; **b)** $\cos \sphericalangle C$; **c)** $\text{tg} \sphericalangle B$; **d)** $\text{ctg} \sphericalangle C$;
**e)** $\sin \sphericalangle C$; **f)** $\cos \sphericalangle B$; **g)** $\text{tg} \sphericalangle C$; **h)** $\text{ctg} \sphericalangle B$.

**2** Se consideră un triunghi $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sin \sphericalangle C = 0{,}25$.
**a)** Calculează $AB$, știind că $BC = 24$ cm. **b)** Calculează $BC$, știind că $AB = 8$ cm.

**3** Fie un triunghi $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\cos \sphericalangle C = 0{,}3$.
**a)** Calculează $AC$, știind că $BC = 20$ cm. **b)** Calculează $BC$, știind că $AC = 12$ cm.

**4** Despre un triunghi $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, se știe că $\text{tg} \sphericalangle B = 1{,}5$.
**a)** Calculează $AC$, știind că $AB = 18$ cm. **b)** Calculează $AB$, știind că $AC = 12$ cm.

**5** În triunghiul dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, calculează:
**a)** $AB$, dacă $AC = 7$ cm și $\text{ctg} \sphericalangle C = 0{,}5$; **b)** $AC$, dacă $AB = 6$ cm și $\text{ctg} \sphericalangle B = 0{,}(3)$.

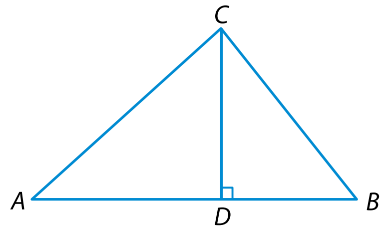
**6** Precizează măsura unghiului $B$ dacă:
**a)** $\sin \sphericalangle B = \frac{1}{2}$; **b)** $\cos \sphericalangle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; **c)** $\text{tg} \sphericalangle B = \sqrt{3}$; **d)** $\text{ctg} \sphericalangle B = \sqrt{3}$;
**e)** $\sin \sphericalangle B = \frac{\sqrt{2}}{2}$; **f)** $\cos \sphericalangle B = \frac{1}{2}$; **g)** $\text{tg} \sphericalangle B = 1$; **h)** $\text{ctg} \sphericalangle B = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

**7** Folosind tabele matematice, determină valorile aproximative (cu trei zecimale exacte) pentru:
**a)** $\sin 53°$; **b)** $\cos 47°$; **c)** $\text{tg}\ 25°$; **d)** $\text{ctg}\ 80°$.

**8** Folosind tabele matematice, determină valoarea aproximativă a unui unghi $n$, în următoarele cazuri:
**a)** $\sin n = 0{,}656$; **b)** $\cos n = 0{,}966$; **c)** $\mathrm{tg}\, n = 0{,}554$; **d)** $\mathrm{ctg}\, n = 0{,}176$.

**9** Calculează:
**a)** $4 \cdot \sin 30° \cdot \cos 45° - \sqrt{2}$; **b)** $\mathrm{tg}\, 45° \cdot \mathrm{ctg}\, 45° - 1$; **c)** $\sqrt{3} \cdot (\mathrm{tg}\, 60° + \mathrm{ctg}\, 60°)$;
**d)** $(\sin 60° + \mathrm{tg}\, 60°) : \mathrm{ctg}\, 30°$; **e)** $\sin^2 30° + \cos^2 30°$; **f)** $4\sqrt{6} \cdot (\sin 45° \cdot \cos 30°)$.

**10** Determină măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$ din figura alăturată, știind că $CD \perp AB$, $D \in AB$, $BD = 3\sqrt{3}$ cm, $CD = 9$ cm și $AC = 9\sqrt{2}$ cm.




**11** Triunghiul $ABC$ este isoscel, cu $AB = AC = 10$ cm și $BC = 16$ cm. Calculează:
**a)** $\sin \sphericalangle B$; **b)** $\cos \sphericalangle C$; **c)** $\mathrm{tg} \sphericalangle B$; **d)** $\mathrm{ctg} \sphericalangle C$.

**12** În triunghiul dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, punctul $D$ este proiecția punctului $A$ pe latura $BC$. Dacă $AB = 12$ cm și $AC = 16$ cm, calculează:
**a)** $\mathrm{tg}(\sphericalangle ACB)$; **b)** $\sin(\sphericalangle ABC)$; **c)** $\mathrm{ctg}(\sphericalangle BAD)$; **d)** $\cos(\sphericalangle DAC)$.

**13** În triunghiul $MNP$, notăm cu $Q$ proiecția punctului $M$ pe dreapta $NP$, $Q$ fiind punct interior laturii $NP$. Calculează lungimea laturii $NP$, știind că:
**a)** $MQ = 4\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle N = 45°$ și $\sphericalangle P = 30°$; **b)** $MQ = 6\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle N = 60°$ și $\sphericalangle P = 45°$.

**14** Știind că $ABCD$ este un romb cu $AC = 12$ cm și $BD = 16$ cm, calculează:
**a)** $\sin(\sphericalangle DAC)$; **b)** $\cos(\sphericalangle BDC)$; **c)** $\mathrm{tg}(\sphericalangle ABD)$; **d)** $\mathrm{ctg}(\sphericalangle ACB)$.

**15** Un trapez isoscel $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, are $AB = 30$ cm, $CD = 12$ cm și înălțimea de 12 cm. Calculează:
**a)** $\sin(\sphericalangle BAD)$; **b)** $\cos(\sphericalangle ABC)$; **c)** $\mathrm{tg}(\sphericalangle DAB)$; **d)** $\mathrm{ctg}(\sphericalangle CBA)$.

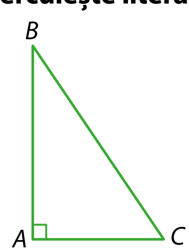
**16** Un triunghi $ABC$ are unghiurile $ABC$ și $CAB$ ascuțite. Știind că $2 \cdot \cos \sphericalangle A = \sqrt{6} \cdot \cos \sphericalangle B = \sqrt{3}$, calculează măsurile unghiurilor triunghiului.

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**
În figura alăturată, triunghiul $ABC$ este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$. Dacă $AB = 8$ cm și $AC = 6$ cm, atunci:

| | | |
|---|---|---|
| **a)** $\sin \sphericalangle B = 0{,}6$; | **A** | **F** |
| **b)** $\cos \sphericalangle B = 0{,}8$; | **A** | **F** |
| **c)** $\mathrm{tg} \sphericalangle C = 0{,}75$; | **A** | **F** |
| **d)** $\mathrm{ctg} \sphericalangle C = 1{,}(3)$. | **A** | **F** |




**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

| | |
|---|---|
| **a)** $\sin 60° \cdot \cos 30° + \sin 30° \cdot \cos 60° = \ldots$ | **1)** 0; |
| **b)** $\cos 30° \cdot \cos 60° - \sin 30° \cdot \sin 60° = \ldots$ | **2)** $\sqrt{3}$; |
| **c)** $2 \cdot (\sin 45° \cdot \cos 60° + \sin 30° \cdot \cos 45°) = \ldots$ | **3)** 1; |
| **d)** $(\mathrm{tg}\, 60° \cdot \mathrm{ctg}\, 45° - \mathrm{ctg}\, 30° \cdot \mathrm{tg}\, 45°) + 2 \cdot \sin 60° = \ldots$ | **4)** 2; |
| | **5)** $\sqrt{2}$. |

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**
Dacă $ABCD$ este un trapez dreptunghic, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 21$ cm, $\sin(\sphericalangle DAC) = \frac{3}{5}$ și $CD = 9$ cm, atunci tangenta unghiului $ABC$ este egală cu $\boxed{\phantom{xxxx}}$.

# LECȚIA 4 Rezolvarea triunghiului dreptunghic

## Ne amintim

- noțiunile de sinus, cosinus, tangentă și cotangentă ale unui unghi ascuțit;
- valorile sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei unghiurilor de 30°, 45° și 60°;
- teorema lui Pitagora.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Ce se înțelege prin **rezolvarea triunghiului dreptunghic**?

Să ne amintim că problema principală pe care am formulat-o cu prilejul introducerii în trigonometrie a fost următoarea:

Dintre cele cinci elemente ale unui triunghi dreptunghic (două unghiuri ascuțite și trei laturi), se dau două elemente (cel puțin o latură). Se cere să se calculeze celelalte trei elemente.

Problema formulată are întotdeauna soluție, deoarece elementele date sunt necesare și suficiente pentru a putea construi triunghiul, dar ne interesează inclusiv calcularea celorlalte trei elemente. Demersul logic pentru realizarea acestui scop se numește rezolvarea triunghiului dreptunghic.

Un element important al unui triunghi sau, mai general, al unui poligon este aria. Ne amintim că, dacă pentru un triunghi oarecare $ABC$ (figura 1), notăm cu $B'$ proiecția punctului $B$ pe $AC$, cu $h_b$ notăm lungimea înălțimii $BB'$ și cu $b$, lungimea laturii $AC$, atunci aria triunghiului $ABC$ se calculează cu formula: $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$.

Notând $\sphericalangle B'AB = A$, considerând triunghiul dreptunghic $B'AB$ și aplicând definiția sinusului, rezultă că $\sin A = \dfrac{h_b}{c}$, de unde $h_b = c \cdot \sin A$ și, înlocuind în egalitatea $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$, obținem $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$.

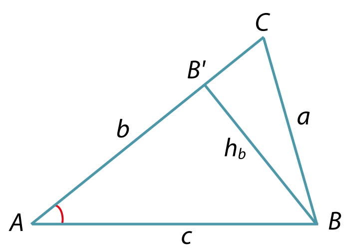


*Fig. 1*

Prin urmare, aria unui triunghi este egală cu semiprodusul lungimilor a două laturi înmulțit cu sinusul unghiului determinat de cele două laturi. Să observăm că această formulă de calcul pentru arie este valabilă dacă $0° < A < 90°$.

*Exemplu:* Un triunghi $ABC$ are laturile $AB = 2$ cm, $AC = 6$ cm și $\sphericalangle BAC = 30°$. Calculează aria triunghiului.

*Rezolvare:* Folosind formula $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \dfrac{2 \cdot 6 \cdot \sin 30°}{2}$, deoarece $\sin 30° = 0{,}5$, rezultă că $\mathcal{A}_{ABC} = 3\text{ cm}^2$.

### Reține!

- Prin **rezolvarea triunghiului dreptunghic** înțelegem demersul logic pe care îl urmăm pentru calcularea elementelor triunghiului dreptunghic (două unghiuri ascuțite și trei laturi), atunci când se cunosc două dintre elemente, dintre care cel puțin o latură.
- Aria unui triunghi este egală cu semiprodusul lungimilor a două laturi înmulțit cu sinusul unghiului determinat de cele două laturi.

## Aplicăm cunoștințele

### PROBLEMA 1

Calculează elementele unui triunghi dreptunghic $ABC$, cunoscând:

**a)** catetele: $AB = 4$ cm și $BC = 8$ cm;

**b)** cateta și ipotenuza: $AB = 4$ cm și $BC = 4\sqrt{3}$ cm;

**c)** cateta și un unghi ascuțit: $AB = 4$ cm și $\sphericalangle ABC = 60°$;

**d)** ipotenuza și un unghi ascuțit: $BC = 8$ cm și $\sphericalangle ACB = 30°$.

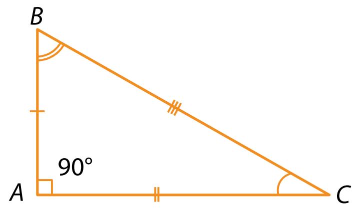


*Fig. 2*

***Rezolvare*** *(activitate pe grupe):*

**a)** Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $ABC$ (figura 2), rezultă: $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 64 - 16 = 48$ și $AC = 4\sqrt{3}$ cm. Din $\sin B = \dfrac{AC}{BC}$ rezultă că $\sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, deci $B = 60°$ și $C = 30°$.

*Concluzie:* $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $B = 60°$ și $C = 30°$.

**Activitate individuală:** rezolvarea cazurilor **b)**, **c)** și **d)**.

## PROBLEMA 2

Se notează cu $D$ proiecția punctului $A$ pe ipotenuza $BC$ a unui triunghi dreptunghic $ABC$ (figura 3). Știind că $AC = 4$ cm și $CD = 2$ cm, calculează elementele triunghiurilor $ABD$ și $ABC$.

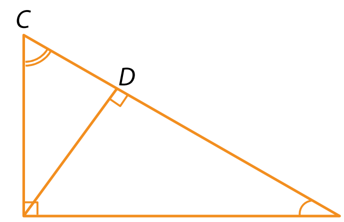


*Fig. 3*

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Deoarece cateta $CD$ a triunghiului dreptunghic $ADC$ este jumătate din ipotenuza $AC$, rezultă că $\sphericalangle CAD = 30°$ (reciproca teoremei 30-60-90). Prin urmare, $\sphericalangle ACD = 90° - 30° = 60°$ și măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului dreptunghic $ABC$ sunt: $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD = 60°$ și $\sphericalangle ABC = 90° - 60° = 30°$.

Rezultă că $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle BAD = 90° - 30° = 60°$.

În triunghiul dreptunghic $ADC$, aplicând teorema lui Pitagora, rezultă: $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 12$, de unde obținem $AD = 2\sqrt{3}$ cm. Aplicăm teorema înălțimii și din $AD^2 = CD \cdot BD$ rezultă că $12 = 2 \cdot BD$, adică $BD = 6$ cm. Folosind teorema 30-60-90 în triunghiul $ADB$, rezultă că $AD = \dfrac{AB}{2}$, adică $2\sqrt{3} = \dfrac{AB}{2}$ și $AB = 4\sqrt{3}$ cm.

*Concluzie*: Elementele triunghiurilor $ABD$ și $ABC$ sunt: $AD = 2\sqrt{3}$ cm, $BD = 6$ cm, $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $\sphericalangle ABD = 30°$ și $\sphericalangle BAD = 60°$, respectiv $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = BD + DC = 6$ cm $+ 2$ cm $= 8$ cm, $\sphericalangle ACB = 60°$ și $\sphericalangle ABC = 30°$.

## PROBLEMA 3

În figura 4, $AB \parallel CD$, $AB = 2$ cm, $AC = 5$ cm, $AD = 3$ cm și $CD = 4$ cm. Calculează $\sin(\sphericalangle BAC)$ și aria triunghiului $ABC$.

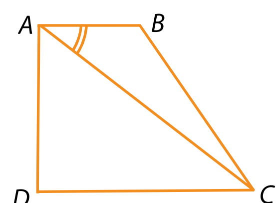


*Fig. 4*

***Rezolvare*** *(activitate frontală):*

Deoarece $AD^2 + CD^2 = 25$ și $AC^2 = 25$, rezultă că $AD^2 + CD^2 = AC^2$. Din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul $ADC$ este dreptunghic, cu ipotenuza $AC$, și atunci $\sin(\sphericalangle ACD) = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{3}{5}$. Cum $AB \parallel CD$ și $AC$ este secantă, rezultă că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ACD$. Prin urmare, $\sin(\sphericalangle BAC) = \sin(\sphericalangle ACD) = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{3}{5}$ și $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin(\sphericalangle BAC)}{2} = 3\text{ cm}^2$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** Calculează perimetrul și aria unui triunghi dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, știind că:

**a)** $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle B = 30°$; **b)** $AC = 8$ cm și $\sphericalangle C = 60°$.

**2** În triunghiul $DEF$, cu $\sphericalangle D = 90°$, notăm cu $G$ proiecția punctului $D$ pe latura $EF$. Calculează perimetrul și aria triunghiului $DEF$, știind că:

**a)** $\sphericalangle E = 30°$ și $DG = 6$ cm; **b)** $\sphericalangle F = 60°$ și $GF = 6$ cm.

**3** În triunghiul $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, notăm cu $D$ proiecția punctului $A$ pe latura $BC$. Știind că $\sphericalangle B = 30°$ și $CD = 6$ cm, calculează:

**a)** perimetrul și aria triunghiului $ADC$; **b)** perimetrul și aria triunghiului $ABC$.

**4** În triunghiul $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AD$ este înălțime, $CD = 4$ cm și $AD = 4\sqrt{3}$ cm (figura 5). Calculează:

**a)** tg $\sphericalangle C$, ctg $\sphericalangle C$, $\sin(\sphericalangle DAC)$, $\cos(\sphericalangle ABC)$;

**b)** perimetrele și ariile triunghiurilor: i) $ACD$; ii) $ABD$; iii) $ABC$.

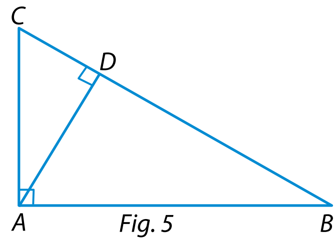


*Fig. 5*

**5** Calculează aria unui triunghi $MNP$, știind că:

**a)** $MN = 15$ cm, $MP = 12$ cm și $\sphericalangle M = 30°$;

**b)** $MN = 18$ cm, $NP = 16$ cm și $\sphericalangle N = 45°$; **c)** $NP = 10$ cm, $MP = 8$ cm și $\sphericalangle P = 60°$.

**6** Un triunghi $ABC$ are aria egală cu $24\sqrt{6}$ cm$^2$.

**a)** Știind că $AB = 8\sqrt{2}$ cm și $AC = 12$ cm, determină măsura unghiului $A$.

**b)** Știind că $AB = 12$ cm și $BC = 8\sqrt{3}$ cm, determină măsura unghiului $B$.

**c)** Știind că $AC = 12\sqrt{2}$ cm și $BC = 8\sqrt{3}$ cm, determină măsura unghiului $C$.

**7** Calculează aria unui paralelogram $ABCD$, știind că:

**a)** $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $AC = 10$ cm și $\sphericalangle A = 45°$; **b)** $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm și $\sphericalangle B = 30°$;

**c)** $AC = 18$ cm, $BC = 10\sqrt{3}$ cm și $\sphericalangle C = 60°$.

**8** Paralelogramul $ABCD$, cu $\sphericalangle A < 90°$, are aria egală cu $72\sqrt{6}$ cm$^2$. Calculează măsurile unghiurilor paralelogramului, știind că:

**a)** $AB = 18$ cm și $AD = 8\sqrt{6}$ cm; **b)** $BC = 12\sqrt{3}$ cm și $CD = 12$ cm;

**c)** $AB = 8\sqrt{2}$ cm și $AD = 18$ cm.

**9** Calculează aria unui dreptunghi $ABCD$, știind că:

**a)** $BC = 5$ cm și $\sphericalangle BAC = 30°$; **b)** $\sphericalangle DAC = 60°$ și $AC = 12$ cm.

**10** Cercul din figura 6 are raza de 12 cm. Coardele $MN$ și $PQ$ sunt paralele. Calculează distanța dintre dreptele $MN$ și $PQ$, știind că $\sphericalangle OMN = 30°$ și $\sphericalangle OPQ = 60°$.

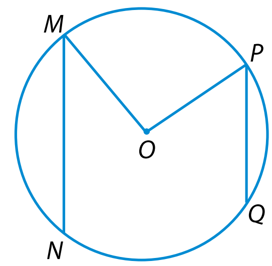


*Fig. 6*

## AUTOEVALUARE

20 min

**Din oficiu: 1 punct**

**1 Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

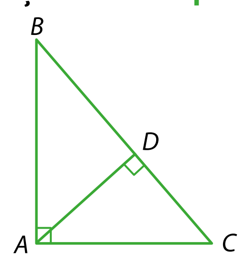
Triunghiul $ABC$ din figura alăturată este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$. Dacă $AD \perp BC$, $AB = 24$ cm și $AC = 18$ cm, atunci:

**a)** $\sin \sphericalangle B = 0{,}6$ și $BC = 30$ cm; **A** **F**

**b)** $\cos \sphericalangle B = 0{,}8$ și $DC = 10{,}8$ cm; **A** **F**

**c)** tg $\sphericalangle B = 0{,}75$ și $BD = 10{,}8$ cm; **A** **F**

**d)** ctg $\sphericalangle B = 1{,}(3)$ și $BD = 19{,}2$ cm. **A** **F**




**2 Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Dacă triunghiul $ABC$ este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 12$ cm și $AC = 12\sqrt{3}$ cm, atunci:

**a)** $\sin \sphericalangle C \cdot \cos \sphericalangle B = \ldots$ **1)** 4;

**b)** $\dfrac{AB}{BC} = \ldots$ **2)** 0,5;

**c)** $\text{tg}^2 \sphericalangle B + 0{,}(3) \cdot \text{ctg}^2 \sphericalangle C = \ldots$ **3)** 0,75;

**d)** $\dfrac{2 \cdot AC}{BC \cdot \sqrt{3}} = \ldots$ **4)** 1;

**5)** 0,25.

**3 Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

Dacă triunghiul $ABC$ este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$ și $BC = 12$ cm, atunci rezultatul calculului $4 \cdot \left(\dfrac{AB}{BC} + \dfrac{AC}{BC} \cdot \text{tg} \sphericalangle C\right) \cdot \cos^2 \sphericalangle B$ este egal cu $\boxed{\phantom{000}}$.

# LECȚIA 5 Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat

## Ne amintim

- definiția și măsura unui unghi la centru și ale unui unghi înscris în cerc;
- definiția și proprietățile mediatoarei unui segment;
- definiția și proprietățile poligonului regulat.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

Considerăm un poligon regulat cu $n$ laturi înscris într-un cerc de centru $O$ (figura 1). Dacă $AB$ este o latură a poligonului, ne amintim că măsura unghiului la centru $AOB$ este egală cu $\frac{360°}{n}$. Notând cu $P$ mijlocul segmentului $AB$, rezultă că $PA = PB$, adică punctul $P$ este egal depărtat de capetele segmentului $AB$ și, ca urmare, punctul $P$ se află pe mediatoarea segmentului $AB$ (1). Analog, din $OA = OB$ (ca raze ale cercului) rezultă că punctul $O$ este egal depărtat de capetele segmentului $AB$ și, ca urmare, punctul $O$ se află pe mediatoarea segmentului $AB$ (2).

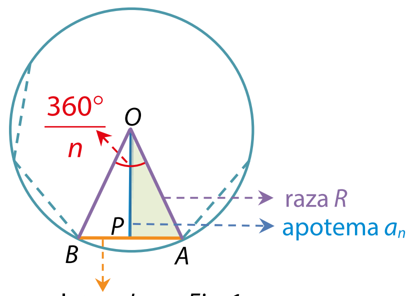


*Fig. 1*

Din (1), (2) și faptul că *două puncte distincte determină în mod unic o dreaptă* rezultă că $OP$ este mediatoarea segmentului $AB$ și distanța de la centrul cercului la latura $AB$ a poligonului este lungimea segmentului $OP$. Distanța de la centrul cercului circumscris la o latură a unui poligon regulat se numește apotema poligonului. Problema care se pune este următoarea:

**Problemă**
Cum calculăm elementele unui poligon regulat (latură, apotemă, perimetru, arie) în funcție de raza $R$ a cercului în care este înscris poligonul?

Pentru rezolvarea acestei probleme se introduc următoarele notații: $R$ – raza cercului în care este înscris poligonul regulat cu $n$ laturi, $l_n$ – lungimea laturii poligonului și $a_n$ – apotema poligonului.

Observăm că problema se reduce la rezolvarea triunghiului dreptunghic $AOP$, cu $\sphericalangle OPA = 90°$, $OA = R$, $OP = a_n$, $AP = \frac{l_n}{2}$, $\sphericalangle POA = \frac{\sphericalangle AOB}{2} = \frac{180°}{n}$ și $\sphericalangle OAP = 90° - \frac{180°}{n}$.

## Rezolvăm împreună

Calculează latura, apotema și aria unui poligon regulat în funcție de raza cercului în care este înscris acesta, știind că poligonul este:

**a)** triunghi echilateral; **b)** pătrat; **c)** hexagon regulat.

***Rezolvare*** *(activitate pe grupe):*

**a) Triunghiul echilateral** (elemente cunoscute)**:**

- $\Delta ABC$ – triunghi echilateral înscris în cercul cu centrul $O$ și raza $R$ (figura 2);
- $P$ – mijlocul laturii $AB$ ($AB = l_3$).

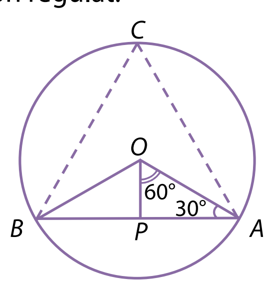


*Fig. 2*

Rezultă: $\sphericalangle AOB = \frac{360°}{3} = 120°$; $\Delta AOB$ este isoscel, $OP$ este bisectoarea unghiului $AOB$ și $\sphericalangle AOP = \frac{120°}{2} = 60°$; $\Delta AOP$ este dreptunghic, $OA = R$ (raza cercului), $OP = a_3$ (apotema triunghiului) și $AP = \frac{AB}{2} = \frac{l_3}{2}$; $\sin(\sphericalangle AOP) = \frac{AP}{OA}$, $\cos(\sphericalangle AOP) = \frac{OP}{OA}$, de unde obținem $AP = OA \cdot \sin(\sphericalangle AOP)$, $OP = OA \cdot \cos(\sphericalangle AOP)$. Ținând cont de notații, rezultă că $\frac{l_3}{2} = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_3 = R \cdot \frac{1}{2}$. Calculăm aria triunghiului $AOP$:

$\mathcal{A}_{AOP} = \frac{OP \cdot OA \cdot \sin 60°}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}$. Rezultă $\mathcal{A}_{AOB} = 2 \cdot \mathcal{A}_{AOP} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$ și $\mathcal{A}_{ABC} = 3 \cdot \mathcal{A}_{AOB} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

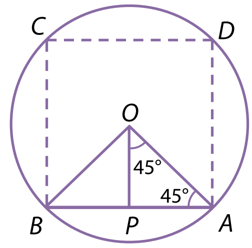


Fig. 3

Concluzie: $l_3 = R\sqrt{3},\ a_3 = \dfrac{R}{2}$ și $\mathcal{A}_3 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

**b) Pătratul** (elemente cunoscute)**:**
- *ABCD* – pătrat înscris în cercul cu centrul *O* și raza *R* (figura 3);
- *P* – mijlocul laturii *AB* ($AB = l_4$).

Rezultă: $\sphericalangle AOB = \dfrac{360°}{4} = 90°$; $\Delta AOB$ este dreptunghic isoscel ($\sphericalangle AOB = 90°$ și $OA = OB = R$),

$\sphericalangle OAB = 45°$; $\sin(\sphericalangle OAB) = \dfrac{OB}{AB}$, adică $\sin 45° = \dfrac{R}{l_4}$ și $l_4 = R\sqrt{2}$; $OP = AP = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{l_4}{2}$ și $a_4 = \dfrac{l_4}{2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$; $\mathcal{A}_{ABCD} = (l_4)^2 = 2R^2$.

Concluzie: $l_4 = R\sqrt{2},\ a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ și $\mathcal{A}_4 = (l_4)^2 = 2R^2$.

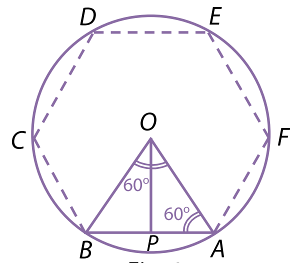


Fig. 4

**c) Hexagonul regulat** (elemente cunoscute)**:**
- *ABCDEF* – hexagon regulat înscris în cercul cu centrul *O* și raza *R* (figura 4);
- *P* – mijlocul laturii *AB* ($AB = l_6$).

Rezultă: $\sphericalangle AOB = \dfrac{360°}{6} = 60°$; $\Delta AOB$ este echilateral ($OA = OB = R$, $\sphericalangle AOB = 60°$), $AB = R$ și $l_6 = R$; $\Delta AOP$ este dreptunghic și $\sin(\sphericalangle OAP) = \dfrac{OP}{OA}$, de unde $OP = OA \cdot \sin(\sphericalangle OAP)$,

adică $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$; $\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \mathcal{A}_{AOB} = 6 \cdot \dfrac{OA \cdot OB \cdot \sin 60°}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

Concluzie: $l_6 = R,\ a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ și $\mathcal{A}_6 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

## Reține!

- **Definiție:**
  Se numește **apotema poligonului regulat** distanța de la centrul cercului circumscris la o latură a poligonului.
- **Elementele unui poligon regulat înscris în cerc în funcție de raza cercului:**
  - **Triunghi echilateral:** $l_3 = R\sqrt{3},\ a_3 = \dfrac{R}{2}$ și $\mathcal{A}_3 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.
  - **Pătrat:** $l_4 = R\sqrt{2},\ a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ și $\mathcal{A}_4 = 2R^2$.
  - **Hexagon regulat:** $l_6 = R,\ a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ și $\mathcal{A}_6 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$.

## Aplicăm cunoștințele

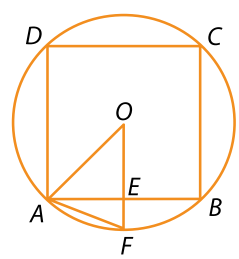


Fig. 5

Un pătrat *ABCD* este înscris într-un cerc cu centrul *O* și raza $R = 2$ cm. Semidreapta *OE*, unde *E* este mijlocul laturii *AB*, intersectează cercul în punctul *F* (figura 5).

Calculează:

**a)** *EF* și *AE*; **b)** $\sphericalangle EAF$ și $\sphericalangle AFE$; **c)** tg 22,5° și tg 67,5°.

***Rezolvare*** *(activitate pe grupe):*

**a)** $AB = l_4 = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ cm și $AE = \sqrt{2}$ cm. Deoarece $AE = EB$ și $OA = OB$, rezultă că *OE* este mediatoarea segmentului *AB* și *OE* este apotema pătratului.

Cum $OE = a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ cm, rezultă că $EF = OF - OE = R - OE = 2 - \sqrt{2}$ cm.

**b)** Deoarece $\sphericalangle AOB = \dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ și mediatoarea laturii $AB$ este bisectoarea unghiului $AOB$, rezultă că $\sphericalangle AOF = \sphericalangle BOF = 45^\circ$. Deoarece $\sphericalangle BOF$ este *unghi la centru*, rezultă că $\overset{\frown}{BF} = 45^\circ$. Cum $\sphericalangle BAF$ este *unghi înscris în cerc*, din $\sphericalangle EAF = \sphericalangle BAF = \dfrac{\overset{\frown}{BF}}{2}$ rezultă că $\sphericalangle EAF = 22{,}5^\circ$. Deoarece triunghiul $AEF$ este dreptunghic, rezultă că $\sphericalangle AFE = 90^\circ - 22{,}5^\circ = 67{,}5^\circ$.

**c)** Triunghiul $AEF$ fiind dreptunghic, aplicăm definiția tangentei și obținem: $\text{tg}(\sphericalangle EAF) = \dfrac{EF}{AE}$ și $\text{tg}(\sphericalangle AFE) = \dfrac{AE}{EF}$, de unde $\text{tg}\,22{,}5^\circ = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ și $\text{tg}\,67{,}5^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. Prin urmare, $\text{tg}\,22{,}5^\circ = \sqrt{2}-1$ și $\text{tg}\,67{,}5^\circ = \sqrt{2}+1$.

## Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

**1** În figura 6, triunghiul $ABC$ este înscris în cercul $\mathcal{C}_1(O, R)$, iar cercul $\mathcal{C}_2(O, r)$ este înscris în triunghiul $ABC$. Analizează figura și rezolvă cerințele de mai jos.

**a)** Numește trei coarde ale cercului $\mathcal{C}_1$ și trei coarde ale cercului $\mathcal{C}_2$.

**b)** Numește trei tangente la cercul $\mathcal{C}_2$.

**c)** Numește trei raze ale cercului $\mathcal{C}_1$, trei raze ale cercului $\mathcal{C}_2$ și trei apoteme ale triunghiului $ABC$.

**d)** Punctele $A$, $O$ și $M$ sunt coliniare? Justifică răspunsul dat.

**e)** Numește bisectoarele unghiurilor triunghiului $ABC$ și mediatoarele laturilor triunghiului $ABC$.

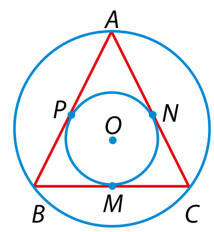


*Fig. 6*

**2** Copiază pe caiet și completează tabelul, în care $R$ este raza cercului circumscris unui triunghi echilateral, iar $l_3$, $a_3$, $\mathcal{A}_3$ și $\mathcal{P}_3$ sunt lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria și perimetrul triunghiului înscris în cerc (dimensiunile sunt date în cm, respectiv cm²).

| | $R$ | $l_3$ | $a_3$ | $\mathcal{A}_3$ | $\mathcal{P}_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **a)** | 6 | | | | |
| **b)** | | | | | $36\sqrt{3}$ |
| **c)** | | | $2\sqrt{3}$ | | |
| **d)** | | | | $9\sqrt{3}$ | |

**3** În figura 7, pătratul $ABCD$ este înscris în cercul $\mathcal{C}_1(O, R)$, iar cercul $\mathcal{C}_2(O, r)$ este înscris în pătratul $ABCD$. Analizează figura și rezolvă cerințele de mai jos.

**a)** Numește patru coarde ale cercului $\mathcal{C}_1$ și patru coarde ale cercului $\mathcal{C}_2$.

**b)** Numește patru tangente la cercul $\mathcal{C}_2$.

**c)** Numește patru raze ale cercului $\mathcal{C}_1$, patru raze ale cercului $\mathcal{C}_2$ și patru apoteme ale pătratului $ABCD$.

**d)** Punctele $P$, $O$ și $M$ sunt coliniare? Justifică răspunsul dat.

**e)** Numește bisectoarele unghiurilor pătratului $ABCD$ și mediatoarele laturilor pătratului $ABCD$.

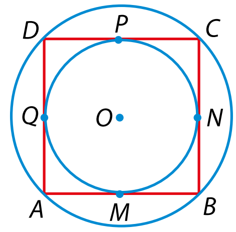


*Fig. 7*

**4** Copiază pe caiet și completează tabelul, în care $R$ este raza cercului circumscris unui pătrat, iar $l_4$, $a_4$, $\mathcal{A}_4$ și $\mathcal{P}_4$ sunt lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria și perimetrul pătratului înscris în cerc (dimensiunile sunt date în cm, respectiv cm²).

| | $R$ | $l_4$ | $a_4$ | $\mathcal{A}_4$ | $\mathcal{P}_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **a)** | | | | | 24 |
| **b)** | $2\sqrt{2}$ | | | | |
| **c)** | | | 4 | | |
| **d)** | | | | 72 | |

**5** În figura 8, hexagonul $ABCDEF$ este înscris în cercul $\mathcal{C}_1(O, R)$, iar $\mathcal{C}_2(O, r)$ este înscris în hexagonul $ABCDEF$. Analizează figura și rezolvă cerințele de mai jos.

**a)** Numește șase coarde ale cercului $\mathcal{C}_1$ și șase coarde ale cercului $\mathcal{C}_2$.

**b)** Numește șase tangente la cercul $\mathcal{C}_2$.

**c)** Numește șase raze ale cercului $\mathcal{C}_1$, șase raze ale cercului $\mathcal{C}_2$ și șase apoteme ale hexagonului $ABCDEF$.

**d)** Sunt coliniare punctele $A$, $O$ și $D$? Dar punctele $M_1$, $O$ și $M_4$? Justifică răspunsurile date.

**e)** Numește bisectoarele unghiurilor hexagonului $ABCDEF$ și mediatoarele laturilor hexagonului.

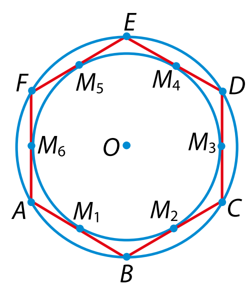


*Fig. 8*

**6** Copiază pe caiet și completează tabelul, în care $R$ este raza cercului circumscris unui hexagon regulat, iar $l_6$, $a_6$, $\mathcal{A}_6$ și $\mathcal{P}_6$ sunt lungimea laturii, lungimea apotemei, respectiv aria și perimetrul hexagonului înscris în cerc (dimensiunile sunt date în cm, respectiv cm²).

| | $R$ | $l_6$ | $a_6$ | $\mathcal{A}_6$ | $\mathcal{P}_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **a)** | | | | | 36 |
| **b)** | 12 | | | | |
| **c)** | | | $4\sqrt{3}$ | | |
| **d)** | | | | $27\sqrt{3}$ | |

**7** Perimetrul unui triunghi echilateral este egal cu perimetrul unui pătrat care are apotema de $9\sqrt{3}$ cm. Calculează:

**a)** perimetrul pătratului;
**b)** apotema triunghiului;
**c)** aria triunghiului.

**8** Un triunghi echilateral are aria egală cu 64 cm². Calculează raza cercului circumscris unui pătrat care are aceeași arie cu triunghiul.

**9** Calculează latura și apotema unui hexagon regulat *ABCDEF*, știind că $BD = 8\sqrt{3}$ cm.

**10** Un hexagon regulat este înscris în același cerc cu un triunghi echilateral care are latura de $6\sqrt{3}$ cm. Calculează apotema și aria hexagonului.

**11** Patrulaterul *ABCD* este înscris într-un cerc și are coardele *AB* și *CD* paralele și congruente. Determină aria unui hexagon regulat înscris în acest cerc, știind că $AB = 8$ cm și $BC = 6$ cm.

**12** Toate laturile unui romb sunt tangente unui cerc (figura 9). O latură a rombului are lungimea de 25 cm, iar una dintre diagonale are lungimea de 30 cm. Calculează elementele unui poligon regulat înscris în acest cerc (latură, apotemă, arie, perimetru), dacă poligonul este:

**a)** triunghi echilateral;
**b)** pătrat;
**c)** hexagon regulat.

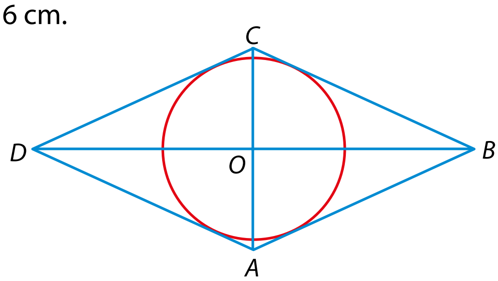


*Fig. 9*

## AUTOEVALUARE

**Din oficiu: 1 punct**

**1** **Dacă afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.** **2 puncte**

**a)** Distanța de la centrul cercului circumscris unui poligon regulat la o latură a poligonului este apotema poligonului respectiv. **A F**

**b)** Apotema unui triunghi echilateral înscris într-un cerc este egală cu o treime din înălțimea triunghiului respectiv. **A F**

**c)** Diagonalele oricărui pătrat înscris într-un cerc sunt diametre ale cercului respectiv. **A F**

**d)** Apotema unui triunghi echilateral înscris într-un cerc este mai mare decât apotema unui pătrat înscris în același cerc. **A F**

**2** **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4 puncte**

Un pătrat și un triunghi echilateral sunt înscrise în același cerc $\mathcal{C}(O, R)$. Dacă $l_4 = 6\sqrt{6}$ cm, atunci:

| | |
|---|---|
| **a)** $R = \ldots$ | **1)** $3\sqrt{3}$; |
| **b)** $\mathcal{A}_4 = \ldots$ | **2)** $108\sqrt{2}$; |
| **c)** $l_3 = \ldots$ | **3)** $6\sqrt{3}$; |
| **d)** $a_3 = \ldots$ | **4)** 18; |
| | **5)** 216. |

**Observație:** Rezultatele sunt date în cm, respectiv în cm².

**3** **Completează caseta cu răspunsul corect.** **3 puncte**

Pe cercul $\mathcal{C}(O, R)$, se consideră punctele *A*, *B* și *C*, astfel încât $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA}$. Dacă $R = 4\sqrt{3}$ cm, atunci perimetrul triunghiului *ABC* este egal cu $\boxed{\phantom{000}}$ cm.

# LECȚIA 6 Aproximarea în situații practice a distanțelor folosind relații metrice

## Ne amintim

- definiția sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei unui unghi ascuțit;
- sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unghiurilor de 30°, 45° și 60°.

## Observăm și descoperim cunoștințe noi

**Problemă**
Cum calculăm sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi oarecare?

În lecțiile anterioare, am văzut cum se calculează sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unghiurilor de 30°, 45° sau 60°. De asemenea, rezolvarea unei probleme ne-a condus la calculul tangentei altor două unghiuri și am obținut că tg 22,5° = $\sqrt{2}-1$ și tg 67,5° = $\sqrt{2}+1$.

Pentru un unghi ascuțit oarecare, cu măsura dată, o metodă empirică pentru estimarea sinusului, cosinusului, tangentei și cotangentei este următoarea: cu instrumente geometrice, se construiește un triunghi dreptunghic *ABC*, care are unul dintre unghiurile ascuțite congruent cu unghiul dat, și se măsoară ipotenuza $BC = a$ și catetele $AC = b$, respectiv $AB = c$. Dacă $\sphericalangle ABC$ este unghiul congruent cu unghiul dat, atunci $\sin(\sphericalangle ABC) = \frac{b}{a}$.

**Dicționar:**
*metodă empirică* = metodă care se bazează pe prelucrarea pur matematică a unor date experimentale.

*Exemplu:* În figura 1, triunghiul dreptunghic *ABC*, cu ipotenuza *BC*, are $BC = 5$ cm, $AC = 4{,}8$ cm și $\sphericalangle ABC = 73{,}5°$. Rezultă că $\sin 73{,}5° \approx \frac{4{,}8}{5}$, de unde $\sin 73{,}5° \approx 0{,}96$. Datorită imposibilității executării unui desen suficient de precis și datorită erorilor de măsurare, metoda nu oferă decât estimări și nu rezultate precise.

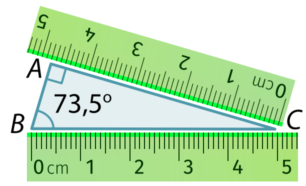


*Fig. 1*

Doar cu metode matematice sofisticate este posibil să se calculeze sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta oricărui unghi cu precizia dorită (cu câte zecimale exacte dorim). În practică, se utilizează tabele trigonometrice sau calculatorul științific de buzunar.

*Exemple:*

1. Calculăm sin 73,5° folosind calculatorul științific, componentă a Microsoft 365 (figura 2):
   - pentru scrierea măsurii unghiului în grade, prin click stânga selectăm **DEG**;
   - introducem numărul 73,5, acționând succesiv tastele respective prin click stânga;
   - click dreapta pe tasta **TRIGONOMETRIE** și selectăm **sin** prin click stânga.

   Rezultă că sin 73,5° = 0,9588… . Pentru aplicațiile practice, rotunjirea la a treia zecimală este suficientă. Rezultă că sin 73,5° = 0,959.
2. Calculăm *x*, știind că $\sin x° = 0{,}959$.
   - pentru scrierea măsurii unghiului în grade, prin click stânga selectăm **DEG**;
   - introducem numărul 0,959, acționând succesiv tastele respective prin click stânga;
   - click dreapta pe tasta **TRIGONOMETRIE** și prin click stânga selectăm **2nd**, apoi **$\sin^{-1}$**.

   Rezultă, prin aproximare, $x = 73{,}5$ (°).
3. Folosind tabelul trigonometric de mai jos, calculăm cos 12° și aflăm *x*, știind că $\text{tg } x° = 0{,}158$.

   La intersecția coloanei **cos *x*** cu linia **12°** găsim numărul 0,978, adică cos 12° = 0,978.

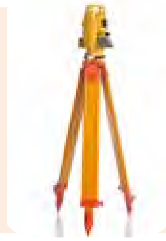
   Pe coloana **tg *x*** căutăm numărul 0,158 și pe linia tabelului unde se află acest număr găsim 9°, adică $x = 9°$.

*Fig. 2*

| *x°* | sin *x* | cos *x* | tg *x* |
|---|---|---|---|
| 1° | 0,017 | 1 | 0,017 |
| 2° | 0,035 | 0,999 | 0,035 |
| 3° | 0,052 | 0,999 | 0,052 |
| 4° | 0,07 | 0,998 | 0,07 |
| 5° | 0,087 | 0,996 | 0,087 |
| 6° | 0,105 | 0,995 | 0,105 |
| 7° | 0,122 | 0,993 | 0,123 |
| 8° | 0,139 | 0,99 | 0,141 |
| 9° | 0,156 | 0,988 | 0,158 |
| 10° | 0,174 | 0,985 | 0,176 |
| 11° | 0,191 | 0,982 | 0,194 |
| 12° | 0,208 | 0,978 | 0,213 |
| 13° | 0,225 | 0,974 | 0,231 |
| 14° | 0,242 | 0,97 | 0,249 |
| 15° | 0,259 | 0,966 | 0,268 |

**Știai că...**

În practică există numeroase instrumente pentru măsurarea unghiurilor. Un astfel de instrument este **teodolitul**. Instrumentul, fixat pe un trepied, este dotat cu o lunetă cu ocular gradat, cu ajutorul căreia operatorul vizează exact punctele de pe teren. Unghiurile situate în plan orizontal sau în plan vertical se determină cu ajutorul unor cadrane gradate.



## Aplicăm cunoștințele

### PROBLEMA 1

De la distanța de 24 m, monumentul lui Ștefan cel Mare din Suceava se vede sub un unghi de 40,77° (figura 3).

Calculează:

**a)** înălțimea totală a monumentului (statuia împreună cu soclul);

**b)** distanța de la obiectivul lunetei teodolitului până la cel mai înalt punct de pe statuie.

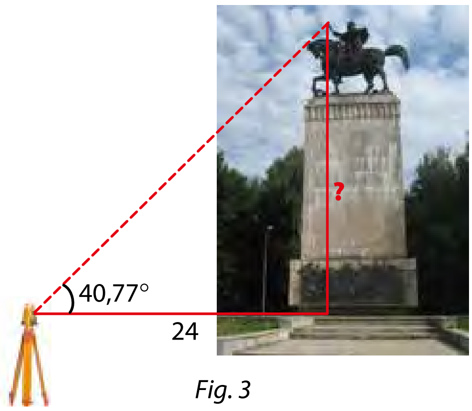


*Fig. 3*

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

Indicații de rezolvare:

**a)** Calculează tg 40,77° și folosește definiția tangentei în triunghiul dreptunghic care se formează. Rezultă că $h = 23$ m.

**b)** Calculează sin 40,77° și folosește definiția sinusului în triunghiul dreptunghic care se formează. Rezultă că $d = 35{,}22$ m.

### PROBLEMA 2

Un pilon este susținut de ancorele $AC$ și $AD$ (figura 4). Se știe că unghiul $BAC$ are 50°, $BD = 6$ m și $CD = \frac{5}{12} \cdot BD$. Rotunjind măsurile unghiurilor la întregi, iar lungimile segmentelor, la zecimi, calculează:

**a)** unghiul $CAD$; **b)** lungimile ancorelor $AC$ și $AD$.

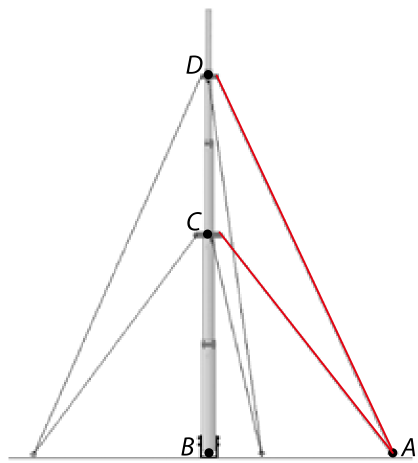


*Fig. 4*

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

Indicații de rezolvare:

$BC = 3{,}50$ m. Prin rotunjire la trei zecimale, calculează tg 50°. Folosește rezultatul pentru a calcula lungimea $AB$ din triunghiul dreptunghic $ABC$. Va rezulta $AB = 2{,}90$ m. În triunghiul dreptunghic $ABD$, cu catetele $AB$ și $BD$, rezultă $\text{tg}(\sphericalangle BAD) = 2{,}069$, de unde $\sphericalangle BAD = 64°$. Rezultă că $\sphericalangle CAD = 14°$.

### PROBLEMA 3

Un *operator topografic* măsoară în plan orizontal unghiul $AOB$ al unei fabrici și constată că măsura acestuia este de 80° (figura 5). Direcția $OC$ este perpendiculară pe direcția $AB$, iar lungimea fabricii este $AB = 400$ m. Știind că triunghiul $AOB$ este isoscel, cu baza $AB$, calculează:

**a)** distanța de la operator la fabrică; **b)** distanțele $OA$ și $OB$.

*Fig. 5*


***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

Indicații de rezolvare:

**a)** tg 40° = 0,839. Rezultă că distanța de la operator la fabrică este egală cu 238,40 m.

**b)** cos 50° = 0,642. Cele două distanțe sunt egale și fiecare măsoară 311,50 m.

**Dicționar:**
*operator topografic* = lucrător care se ocupă cu tehnica măsurătorilor și a calculelor pentru porțiuni restrânse de pe suprafața pământului, în scopul întocmirii de hărți și planuri.

## Problema 4

*Harta topografică* din figura 6 este realizată la scară. Liniile curbe (maro) sunt *linii de nivel* (punctele unei linii curbe sunt la aceeași înălțime față de nivelul mării). Distanța reală, în linie dreaptă, dintre cele mai înalte vârfuri ($B$ și $C$) a două dealuri este de 1 km.

**a)** Calculează scara hărții.

**b)** Observă cu atenție harta și calculează unghiul pe care îl face cel mai înalt vârf de pe hartă cu orizontala.

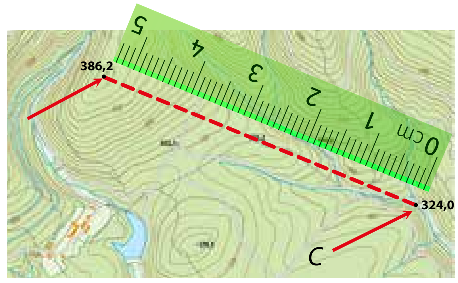



*Fig. 6*

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

Indicații de rezolvare:

**a)** Se măsoară cu rigla gradată distanța $BC$. Dacă, spre exemplu, găsim $BC = 5$ cm, scara hărții este $5 : 100000$ sau $1 : 200000$.

**b)** Schematic (figura 7), în plan vertical, $OB$ este înălțimea dealului $B$, $RC$ este înălțimea dealului $C$, iar $OR$ reprezintă direcția orizontală și $PC \parallel OR$. Se obține $PB = 62{,}2$ m și $x = 0{,}35°$.

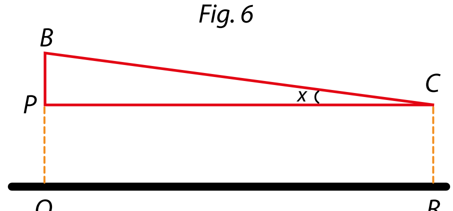



*Fig. 7*

## Problema 5

Mecanismul bielă-manivelă este o parte din componența motoarelor și are rolul de a transforma mișcarea de du-te-vino a unui piston (punctul $B$) în mișcare de rotație, astfel încât punctul mobil $A$ descrie un cerc cu centrul în punctul fix $O$ (figura 8). Știind că $OA = 25$ cm și $AB = 60$ cm, calculează cea mai mare valoare pe care o poate lua unghiul $x$.

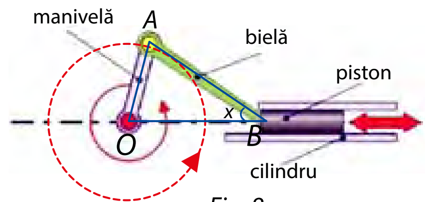



*Fig. 8*

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

Indicații de rezolvare:

Dreapta $AB$ trebuie să fie tangentă la cercul cu centrul $O$ și raza $OA$. Atunci triunghiul $AOB$ este dreptunghic în $A$. Rezultă că $x = 22{,}64° = 22°38'24''$.

## Problema 6

Un baston lung de 0,96 m, ținut vertical pe pământ, aruncă o umbră cu lungimea de 0,64 m (figura 9).

**a)** Calculează unghiul determinat de razele soarelui cu orizontala.

**b)** Folosește-te de tangenta unghiului determinat de razele soarelui cu orizontala pentru a calcula înălțimea copacului, știind că acesta aruncă o umbră de 2,80 m.

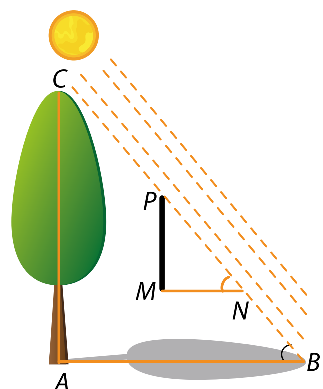



*Fig. 9*

***Rezolvare*** *(activitate individuală):*

Indicații de rezolvare:

**a)** $\Delta MNP$ este dreptunghic. Din $\text{tg}(\sphericalangle MNP) = \dfrac{MP}{MN}$, efectuând calculele, rezultă *unghiul determinat de razele soarelui cu orizontala.*

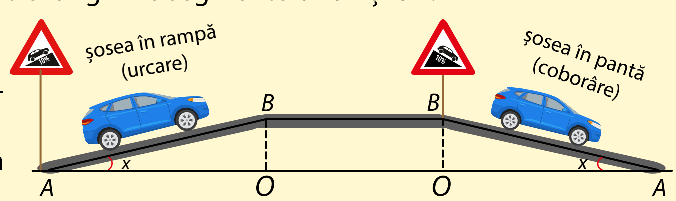
**b)** $\Delta ABC$ este dreptunghic. Din $\text{tg}(\sphericalangle ABC) = \dfrac{AC}{AB}$, deoarece $\sphericalangle ABC = \sphericalangle MNP$, rezultă că $\text{tg}(\sphericalangle MNP) = \dfrac{AC}{AB}$, de unde $AC = AB \cdot \text{tg}(\sphericalangle MNP)$. Efectuând calculele, se obține *înălțimea copacului*.

### Portofoliu

Prin *panta unei șosele AB* se înțelege raportul dintre lungimile segmentelor $OB$ și $OA$.

**a)** Panta unei șosele este $\dfrac{1}{10}$, adică de 10%. Calculează unghiul pe care îl face șoseaua cu orizontala.

**b)** Calculează panta unei șosele, dacă aceasta face cu orizontala un unghi de 5°.



# 1. PROBLEME RECAPITULATIVE

**1** Se consideră un triunghi ascuțitunghic $ABC$, se notează cu $D$ proiecția punctului $A$ pe latura $BC$, $D \in BC$, și cu $E$, proiecția punctului $D$ pe latura $AC$, $E \in AC$. Se știe că $AE = 12$ cm, $CE = 4$ cm și $BD = 8$ cm.

a) Calculează lungimile segmentelor $DE$, $AD$ și $CD$.

b) Arată că triunghiul $ABC$ este echilateral.

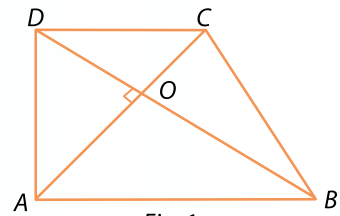


*Fig. 1*

**2** Patrulaterul $ABCD$ este un trapez, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$. Diagonalele trapezului sunt perpendiculare și se intersectează în punctul $O$ (figura 1). Dacă $AB = 40$ cm și $AD = 30$ cm, calculează:

a) lungimile segmentelor $OA$, $OB$, $OC$ și $OD$;

b) aria trapezului $ABCD$.

**3** În triunghiul dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, se notează cu $D$ proiecția punctului $A$ pe latura $BC$, $D \in BC$.

a) Dacă $BC = a$ și $AB = c$, calculează lungimile segmentelor $BD$ și $CD$.

b) Dacă $BC = 5$ cm și $AB = 3$ cm, calculează $\sin(\sphericalangle BAD)$, $\cos(\sphericalangle ACD)$, $\operatorname{tg}(\sphericalangle ABD)$ și $\operatorname{ctg}(\sphericalangle DAC)$.

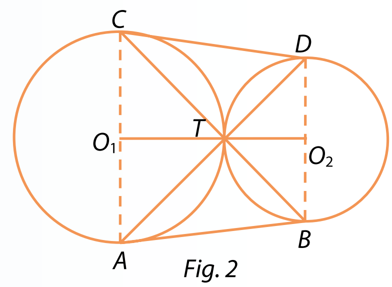


*Fig. 2*

**4** Două cercuri cu centrele $O_1$ și $O_2$ și cu razele de lungimi diferite sunt tangente exterioare în punctul $T$. Dreapta $AB$ este tangenta comună exterioară a celor două cercuri. Dreapta $AT$ intersectează cercul cu centrul $O_2$ în punctul $D$ și dreapta $BT$ intersectează cercul cu centrul $O_1$ în punctul $C$ (figura 2). Demonstrează că:

a) $\sphericalangle ATB = 90°$;

b) $A$ și $C$ sunt puncte diametral opuse;

c) $AB^2 = BT \cdot TC + TA \cdot TD$.

**5** Centrul unui triunghi echilateral $ABC$ este punctul $O$. Punctul $D$ este mijlocul laturii $BC$, punctul $M$ se află pe segmentul $OA$ și $OM = \frac{1}{4}OA$. Știind că aria triunghiului $BOM$ este $\sqrt{3}$ cm², calculează aria triunghiului $ABC$.

**6** Triunghiul $AOB$ este isoscel, cu baza $AB$, iar punctul $D$ este proiecția punctului $A$ pe latura $OB$. Se știe că $\sphericalangle AOB = 2x$ și $OA = a$.

a) Demonstrează că $AB = 2a \cdot \sin x$ și $AD = a \cdot \sin 2x$.

b) Dacă $2x$ este măsura în grade a unui unghi ascuțit, demonstrează că $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$.

**7** Un triunghi echilateral și un pătrat sunt înscrise în același cerc $\mathscr{C}(O, R)$. Știind că $a_3 = 3$ cm, calculează:

a) $R$; b) $l_4$; c) $\mathscr{P}_3$; d) $\mathscr{A}_4$.

**8** Un triunghi echilateral și un hexagon regulat sunt înscrise în același cerc $\mathscr{C}(O, R)$. Știind că $a_6 = 6$ cm, calculează:

a) $R$; b) $l_3$; c) $\mathscr{A}_3$; d) $\mathscr{A}_6$.

**9** Un pătrat și un hexagon regulat sunt înscrise în același cerc $\mathscr{C}(O, R)$. Știind că $a_4 = 5\sqrt{2}$ cm, calculează:

a) $R$; b) $a_6$; c) $\mathscr{A}_4$; d) $\mathscr{A}_6$.

**10** În figura 3, $ABCD$ este dreptunghi, punctele $E$ și $F$ aparțin laturilor $AB$, respectiv $BC$, $CE = DF$, $CE \cap DF = \{H\}$ și $\sin(\sphericalangle BCE) = \sin(\sphericalangle CDF)$.

a) Demonstrează că $ABCD$ este pătrat și că $CE \perp DF$.

b) Dacă $BE = 30$ cm și $CH = 24$ cm, calculează lungimile segmentelor $AB$ și $DH$.

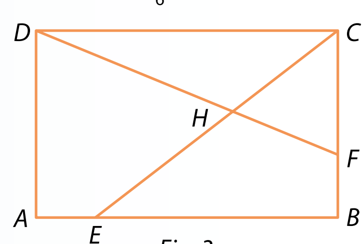


*Fig. 3*

**11** Un triunghi dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, are înălțimea $AD = 12$ cm, $D \in BC$, și $\operatorname{tg}(\sphericalangle ACB) = 0{,}75$. Calculează:

a) lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză;

b) $\sin(\sphericalangle ACB)$ și $\operatorname{ctg}(\sphericalangle ACB)$;

c) perimetrul și aria triunghiului $ABC$.

# 2. TEST DE EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

(5p) **1.** Un dreptunghi are lungimea de 15 cm și lățimea de 8 cm. Lungimea diagonalei dreptunghiului este de … .

(5p) **2.** Un triunghi $ABC$ are $AB = 12$ cm, $AC = 5$ cm și $BC = 13$ cm. Măsura unghiului $BAC$ este egală cu … .

(5p) **3.** Dacă $ABCD$ este un paralelogram, cu $AB = 4$ cm, $AD = 6$ cm și $\sphericalangle A = 60°$, atunci aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu … .

(5p) **4.** Dacă triunghiul dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, are $AB = 12$ cm și $\text{tg} \sphericalangle C = 0{,}75$, atunci perimetrul triunghiului este egal cu … .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**

Dacă $ABCDEF$ este un hexagon regulat cu centrul în punctul $O$ și $BD = 8\sqrt{3}$ cm, atunci:

| | A | B |
|---|---|---|
| (5p) | **1.** lungimea laturii $AB$ este egală cu … | **a)** 12 cm; |
| (5p) | **2.** lungimea segmentului $AE$ este egală cu … | **b)** $24\sqrt{3}$ cm; |
| (5p) | **3.** proiecția segmentului $BD$ pe dreapta $BE$ are lungimea egală cu … | **c)** $8\sqrt{3}$ cm; |
| (5p) | **4.** perimetrul triunghiului $BED$ este egal cu … | **d)** 8 cm; |
| | | **e)** $8(3+\sqrt{3})$ cm. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) **1.** Patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi, cu $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm, iar $M$ este un punct pe latura $AB$, astfel încât $AM = x$ cm. Triunghiul $CMD$ este dreptunghic dacă și numai dacă:
**A.** $x = 5$; **B.** $x = 4$; **C.** $x = 3$; **D.** $x = 2$.

(5p) **2.** Raportul dintre apotema și latura unui hexagon regulat este egal cu:
**A.** $\sqrt{3}$; **B.** $0{,}5\sqrt{3}$; **C.** $0{,}(3)\sqrt{3}$; **D.** $0{,}25\sqrt{3}$.

(5p) **3.** Lungimea unei catete a unui triunghi dreptunghic este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei triunghiului respectiv. Dacă notăm cu $x$ și $y$ măsurile unghiurilor ascuțite ale triunghiului, atunci $\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$ este egal cu:
**A.** 2; **B.** 1,5; **C.** 1; **D.** 0,5.

(5p) **4.** Dacă $x$ este măsura unui unghi ascuțit, $\sin x = 0{,}8$ și $\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x = a$, atunci:
**A.** $a \geq 3$; **B.** $2 < a < 3$; **C.** $a = 2$; **D.** $a < 2$.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

**IV.** Se consideră un triunghi dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$, și se notează cu $D$ proiecția punctului $A$ pe $BC$. Știind că $AB = 30$ cm și $AC = 30\sqrt{3}$ cm, determină:

(5p) **a)** lungimea ipotenuzei $BC$;

(5p) **b)** lungimile proiecțiilor segmentelor $AB$, respectiv $AC$ pe dreapta $BC$;

(5p) **c)** rezultatul calculului $\sin(\sphericalangle ABC) \cdot \text{tg}(\sphericalangle ACB) + \cos(\sphericalangle ACB) \cdot \text{ctg}(\sphericalangle ABC)$.

**V.** Un romb $ABCD$ are perimetrul egal cu 24 cm și aria egală cu $18\sqrt{3}$ cm$^2$. Calculează:

(5p) **a)** lungimea laturii rombului;

(5p) **b)** măsurile unghiurilor rombului;

(5p) **c)** lungimile diagonalelor rombului.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

## FIȘĂ DE OBSERVARE SISTEMATICĂ A ACTIVITĂȚII ȘI A COMPORTAMENTULUI ELEVULUI

Autoevaluarea activității elevului în procesul de învățare este un instrument util atât cadrului didactic, cât și elevului, pentru a putea determina implicarea acestuia pe parcursul unei unități de învățare.

Copiază pe o foaie de hârtie următorul tabel, completează-l și adaugă-l la portofoliul personal.

| Răspunsuri | Da/Nu/Parțial |
|---|---|
| Am participat activ la fiecare lecție. | |
| Am recapitulat înainte de fiecare lecție noțiunile învățate anterior. | |
| Am pus întrebări profesorului atunci când am avut nelămuriri. | |
| Am răspuns întrebărilor adresate de profesor sau de colegi. | |
| Am colaborat cu colegii la activitățile desfășurate. | |
| Am obținut la testul de recapitulare și evaluare nota (nota ta). | |

**Fișa se completează după parcurgerea fiecărei unități de învățare.**

# RECAPITULARE ȘI EVALUARE FINALĂ

## 1. PROBLEME RECAPITULATIVE

**1** Calculează media aritmetică și media geometrică ale numerelor $a$ și $b$, știind că:

$$a=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{48}} \text{ și } b=\left(3\sqrt{2}+\sqrt{18}-\sqrt{50}\right)^3:\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3}.$$

**2** Se consideră numerele reale $a=\sqrt{10}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)+\left|3\sqrt{2}-6\right|$ și $b=4+\frac{10}{\sqrt{5}}+\left(\sqrt{3}\right)^2$.

a) Arată că $a=6+2\sqrt{5}$.

b) Calculează $(a-b)^{2024}$.

**3** Calculează $a^b$, știind că $a=2\sqrt{847}-9\sqrt{8}+2\sqrt{162}-\sqrt{567}$ și $b=10\sqrt{8}-5\sqrt{32}+50\sqrt{5}-25\sqrt{20}$.

**4** Se consideră numerele $x=\sqrt{3}+(-1)^{2024}-\frac{3}{\sqrt{3}}$ și $y=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$. Calculează media ponderată a numerelor $x$ și $y$, cu ponderile 2, respectiv 3.

**5** Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $A=\left\{-3,-\sqrt{6},\ 2,\ \sqrt{6},\ 6\right\}$, acesta să fie o soluție a ecuației $7x^2=42$?

**6** a) Rezolvă ecuația $4x-\sqrt{3}=\sqrt{27}$.

b) Determină $m\in\mathbb{R}$, știind că $x=\sqrt{2}-1$ este o soluție a ecuației $mx+2=2\sqrt{2}$.

**7** Rezolvă sistemele de ecuații cu două necunoscute:

a) $\begin{cases}0,5x+y=-1\\1,5x-0,(3)y=7\end{cases}$; b) $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=2\sqrt{2}\\\sqrt{3}x+\sqrt{2}y=2\sqrt{3}\end{cases}$; c) $\begin{cases}3|x|+2|y|=5\\5|x|+4|y|=9\end{cases}$.

**8** Media aritmetică a două numere este 19,5. Diferența dintre dublul primului număr și triplul celui de-al doilea număr este 18.

a) Determină numerele.

b) Calculează media geometrică a celor două numere.

**9** Fie numerele: $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2024} - \frac{1}{2025}$ și $b = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ... + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}$.
Calculează $2025 \cdot (a + b)$.

**10** Se consideră numerele reale:

$$x = \sqrt{10} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) + |3\sqrt{2} - 6| \text{ și } y = 4 + \frac{10}{\sqrt{5}} + (\sqrt{3})^2.$$

a) Efectuează calculele și arată că $x = 2\sqrt{5} + 6$.
b) Calculează $(x - y)^{2025}$.

**11** a) Simplifică fracția $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27} + ... + \sqrt{300}}{\sqrt{6} + \sqrt{24} + \sqrt{54} + ... + \sqrt{600}}$.

b) Arată că numărul real $a = \sqrt{100 + (2 + 4 + 6 + ... + 198)}$ este pătrat perfect.

**12** a) Dacă $a = b$, arată că $\frac{1}{3}a - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0,(3)b - \sqrt{3}$.

b) Dacă $\frac{1}{3}a - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0,(3)b - \sqrt{3}$, arată că $a = b$.

**13** În biblioteca unei școli sunt 16800 de volume. Se știe că 60% din numărul lor sunt cărți de literatură, 3% sunt dicționare, iar restul sunt reviste școlare.
a) Calculează numărul revistelor școlare.
b) Calculează ce procent din numărul cărților de literatură reprezintă numărul dicționarelor.
c) Calculează cu ce procent trebuie mărit fondul de carte existent pentru a avea în bibliotecă 21000 de volume.

**14** a) Reprezintă într-un reper ortogonal punctele $A(-1, 1)$, $B(5, 1)$ și $C(2, 6)$.
b) Calculează distanțele $AB$, $AC$, $BC$. Ce observi?
c) Precizează coordonatele mijlocului segmentului $AB$.

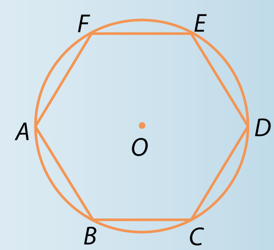


*Fig. 1*

**15** În figura 1, $ABCDEF$ este un hexagon regulat, cu lungimea laturii de 6 cm, iar $O$ este centrul cercului circumscris hexagonului. Calculează:
a) lungimea cercului și aria discului;
b) măsurile unghiurilor $AOB$, $ABC$ și $ABD$;
c) ariile patrulaterelor $ABDE$ și $ABCD$.

**16** Pe cercul de centru $O$ și raza de 6 cm, se consideră două puncte $A$ și $B$, astfel încât $AB = 6\sqrt{2}$ cm. Calculează:
a) măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$;
b) distanța de la centrul cercului la coarda $AB$.

**17** Triunghiul $ABC$ este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$, și punctul $D$ este proiecția punctului $A$ pe dreapta $BC$. Știind că $BC = 25$ cm și $CD = 9$ cm, calculează:
a) lungimile segmentelor $AD$, $AC$ și $AB$;
b) valorile pentru $\sin \sphericalangle B$, $\cos \sphericalangle B$, $\text{tg} \sphericalangle C$, $\text{ctg} \sphericalangle C$;
c) perimetrul și aria triunghiului $ABD$.

**18** Rombul $ABCD$ din figura 2 are aria egală cu $18\sqrt{3}$ cm$^2$ și $AB = 6$ cm.
Calculează:
a) lungimea înălțimii $DH$;
b) lungimea segmentului $HC$;
c) măsura unghiului $CDH$.

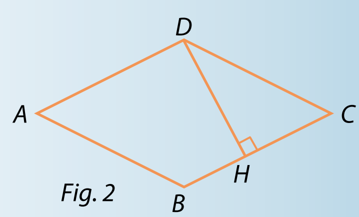


*Fig. 2*

**19** a) Calculează aria unui disc de centru $O$ și rază $r$, știind că lungimea cercului de centru $O$ și rază $r$ este egală cu $24\pi$ cm.
b) Determină măsura unui unghi al unui poligon regulat cu 8 laturi.
c) Calculează aria unui sector de cerc cu unghiul la centru de 120°, știind că diametrul cercului este de 12 cm.

**20** Triunghiul $MNP$ are vârfurile pe un cerc de centru $O$ și rază $r$. Bisectoarea unghiului $MNP$ intersectează cercul în punctul $R$.

a) Demonstrează că $\sphericalangle PNR \equiv \sphericalangle NPR$.

b) Pentru $\overset{\frown}{MN} = 80°$ și $\overset{\frown}{MP} = 160°$, calculează măsurile unghiurilor triunghiului $MNP$.

**21** Pe latura $BC$ a unui triunghi $ABC$, se ia un punct $M$. Se construiesc $MN \parallel AC$, $N \in AB$, $MP \parallel AB$, $P \in AC$. Arată că:

a) $\dfrac{AN}{AB} = \dfrac{CM}{BC}$; b) $\dfrac{AP}{AC} = \dfrac{BM}{BC}$; c) $\dfrac{AN}{AB} + \dfrac{AP}{AC} = 1$.

**22** Segmentul $AB$ este diametrul cercului cu centrul $O$ și raza de 5 cm. Punctele $C$ și $D$ se află pe tangentele la cerc în punctele $A$, respectiv $B$, astfel încât $CD$ să fie și ea tangentă la cerc în punctul $E$, conform figurii 3.

a) Demonstrează că $\sphericalangle COD = 90°$.

b) Arată că $\Delta AOC \sim \Delta BDO$.

c) Calculează $AC \cdot BD$.

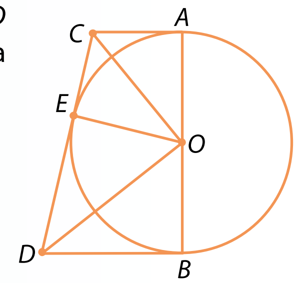


*Fig. 3*

**23** Se consideră un cerc cu raza de 6 cm. Calculează, în funcție de raza cercului, latura, apotema și aria poligonului înscris în cerc, dacă acesta este:

a) triunghi echilateral;

b) pătrat;

c) hexagon regulat.

**24** Se consideră un triunghi dreptunghic $ABC$, cu $\sphericalangle A = 90°$. Știind că $BC = 100$ cm și $\text{tg} \sphericalangle C = \dfrac{4}{3}$, calculează:

a) lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză;

b) perimetrul și aria triunghiului $ABC$.

**25** Se consideră un triunghi $ABC$, cu $\sphericalangle ABC = 60°$ și $AB = 10$ cm. Se notează cu $D$ proiecția punctului $A$ pe dreapta $BC$ și cu $M$, mijlocul laturii $AB$. Calculează:

a) raza cercului circumscris triunghiului $ABD$;

b) lungimea segmentului $DM$;

c) distanța de la centrul cercului circumscris triunghiului $ABD$ la dreapta $AD$.

**26** În figura 4, este reprezentat paralelogramul $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$ și $CD = 18$ cm. Punctul $E$ împarte segmentul $AB$ în părți proporționale cu numerele 1 și 2. Se notează cu $F$ intersecția dreptelor $AC$ și $DE$.

a) Calculează raportul dintre perimetrul triunghiului $AEF$ și perimetrul triunghiului $CDF$.

b) Calculează raportul dintre aria triunghiului $AEF$ și aria triunghiului $CDF$ și raportul dintre aria triunghiului $AEF$ și aria triunghiului $ODF$.

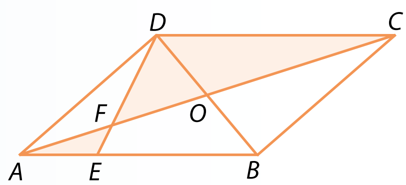


*Fig. 4*

**27** Pe un segment $AD$, se iau punctele $B$ și $C$, în această ordine, astfel încât $AB = 1{,}5$ cm, $AC = 3$ cm și $AD = 4{,}5$ cm. Patru drepte paralele construite prin punctele $A$, $B$, $C$ și $D$ intersectează o dreaptă oarecare $d$ în punctele $M$, $N$, $P$ și $Q$.

a) Calculează lungimile segmentelor $BC$, $BD$ și $CD$.

b) Demonstrează că punctul $N$ este mijlocul segmentului $MP$.

c) Calculează rapoartele $\dfrac{PQ}{NQ}, \dfrac{PQ}{MP}, \dfrac{NP}{MQ}$.

d) Pentru $PQ = 3$ cm, calculează lungimile segmentelor $MN$, $MP$ și $MQ$.

e) Pentru $PQ = 3$ cm, demonstrează că segmentele $AB$, $AC$ și $AD$ sunt respectiv proporționale cu segmentele $MN$, $MP$ și $MQ$.

**28** Trapezul $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ și $\sphericalangle A = 90°$, are lungimile bazelor de 16 cm și 5 cm. Știind că lungimea diagonalei $AC$ este egală cu 13 cm, calculează lungimea:

a) proiecției laturii $BC$ pe dreapta $AB$;

b) laturii $AD$ a trapezului $ABCD$;

c) diagonalei $BD$ a trapezului $ABCD$.

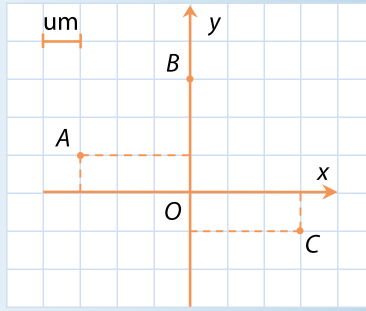
# 2. TESTE DE EVALUARE FINALĂ

## Test de evaluare finală 1

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

În sistemul de axe ortogonale $xOy$ din figura alăturată, sunt reprezentate punctele $A$, $B$ și $C$.




(5p) 1. Ordonata punctului $A$ este ... .

(5p) 2. Abscisa punctului $B$ este ... .

(5p) 3. Lungimea segmentului $BC$ este egală cu ... um.

(5p) 4. Dacă punctul $D$ este simetricul punctului $A$ față de axa $Ox$, atunci coordonatele punctului $D$ sunt ... .

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**

| A | B |
|---|---|
| (5p) 1. $\frac{5}{6}\sqrt{1,44}+(1-\sqrt{4})^{-3}=\ldots$ | a) 7; |
| (5p) 2. $\sqrt{17^2-15^2}-\sqrt{17^2}+\sqrt{15^2}=\ldots$ | b) 2; |
| (5p) 3. $\left(\sqrt{300}-\sqrt{48}+\frac{1}{3}\sqrt{27}\right):\sqrt{3}=\ldots$ | c) 5; |
| (5p) 4. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{12}}{6}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{48}}=\ldots$ | d) 0; |
| | e) 6. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Numerele reale $x$ pentru care $|x-2|=2$ sunt:
A. $\{3, 5\}$; B. $\{0, 4\}$; C. $\{-2, 2\}$; D. $\{0, -4\}$.

(5p) 2. Soluțiile ecuației $(2x+1)^2=25$ sunt:
A. $\{-2, 3\}$; B. $\{2, 1\}$; C. $\{2, -3\}$; D. $\{1, -3\}$.

(5p) 3. Cel mai mare număr întreg mai mic decât $-2\sqrt{3}$ este:
A. $-2$; B. $-3$; C. $-5$; D. $-4$.

(5p) 4. Diferența dintre media aritmetică și media geometrică ale numerelor $x=\sqrt{243}$ și $y=\sqrt{3}$ este:
A. $2\sqrt{3}$; B. $3\sqrt{3}$; C. $5\sqrt{3}$; D. $7\sqrt{3}$.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

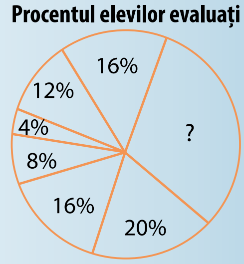
(5p) IV. a) Fără a folosi calculatorul, încadrează numărul $-\sqrt{37}$ între două numere întregi consecutive.

(5p) b) Scrie partea întreagă a celui mai mic număr din mulțimea $A=\left\{-2;\ 1,7; -0,1(3); -\sqrt{5}\right\}$.

(5p) c) Rezolvă sistemul: $\begin{cases}3x-5y=-7\\4x+3y=10\end{cases}$.

V. Rezultatele obținute de elevii unei clase la o probă de evaluare au fost sistematizate în diagrama circulară „Procentul elevilor evaluați".

Procentul elevilor evaluați




| Nota | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Număr elevi (în procente) | 4% | 12% | 16% | | 20% | 16% | 8% |
| Număr elevi | | | | | | | |

(5p) a) Completează tabelul cu procentul elevilor care au luat nota 7.

(5p) b) Știind că doi elevi au luat nota 10, precizează numărul elevilor care au participat la această evaluare și completează tabelul cu numărul elevilor.

(5p) c) Reprezintă numărul elevilor în funcție de nota obținută, cu ajutorul unei diagrame tip coloană.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

## Test de evaluare finală 2

Timp de lucru: 50 de minute.

**I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.**

(5p) 1. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu $\frac{1}{4}$. Raportul perimetrelor celor două triunghiuri este egal cu … .

(5p) 2. Fie un triunghi dreptunghic *ABC*, cu $\sphericalangle A = 90°$. Dacă $\sin \sphericalangle B = \frac{1}{2}$, atunci $\cos \sphericalangle B$ este … .

(5p) 3. Măsura unui unghi al unui poligon regulat cu 8 laturi este egală cu … .

(5p) 4. Fie un triunghi *ABC*. Dacă $AB = 17$ cm, $AC = 15$ cm și $BC = 8$ cm, atunci $\sphericalangle C = \ldots°$.

**II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana A cu răspunsul corespunzător din coloana B.**
Punctele *M*, *N* și *P* sunt mijloacele laturilor *AB*, *BC* și *CA* ale unui triunghi *ABC*.

| | A | B |
|---|---|---|
| (5p) | 1. Patrulaterul *BMPN* este … | a) pătrat; |
| (5p) | 2. Dacă $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 90°$, atunci patrulaterul *BMPN* este … | b) dreptunghi; |
| (5p) | 3. Dacă $\sphericalangle B = 90°$ și $AB = CB$, atunci patrulaterul *BMPN* este … | c) paralelogram; |
| (5p) | 4. Dacă $AB = BC$, atunci patrulaterul *BMPN* este … | d) romb; |
| | | e) trapez. |

**III. Alege litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Un hexagon regulat este înscris în același cerc cu un triunghi echilateral care are latura de $6\sqrt{3}$ cm. Apotema hexagonului regulat este egală cu:

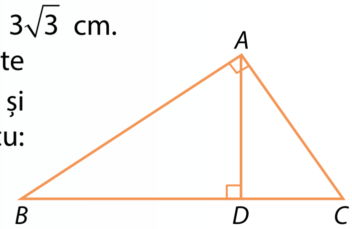
A. $2\sqrt{3}$ cm; B. $3\sqrt{3}$ cm; C. 3 cm; D. 2 cm.

(5p) 2. Un triunghi echilateral are aria egală cu 144 cm$^2$. Raza cercului circumscris unui pătrat care are aceeași arie cu triunghiul este egală cu:

A. $6\sqrt{3}$ cm; B. $3\sqrt{2}$ cm; C. $6\sqrt{2}$ cm; D. $3\sqrt{3}$ cm.

(5p) 3. Triunghiul *ABC* este dreptunghic, cu ipotenuza *BC*, și punctul *D* este proiecția punctului *A* pe latura *BC* (figura alăturată). Dacă $AB = 8\sqrt{3}$ cm și $BC = 16$ cm, atunci rezultatul calculului $AB - 2AD + 3BD - 5CD$ este egal cu:

A. 16 cm; B. 24 cm;
C. 8 cm; D. $16\sqrt{3}$ cm.



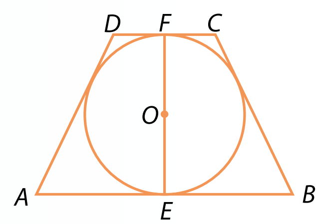

(5p) 4. Punctul *D* se află pe latura *BC* a unui triunghi *ABC*. Dacă $BC = 20$ cm, $BD = 8$ cm și $\Delta DAC \sim \Delta DBA$, atunci lungimea segmentului *AD* este egală cu:

A. 12 cm; B. $2\sqrt{6}$ cm; C. 4 cm; D. $4\sqrt{6}$ cm.

**La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.**

IV. În figura alăturată, *ABCD* este un trapez isoscel circumscris cercului cu centrul *O*, iar punctele *E* și *F* sunt mijloacele laturilor *AB* și *CD*. Se știe că $AB \parallel CD$, $AB = 18$ cm, $CD = 12$ cm și $AD \cap BC = \{M\}$. Calculează:

(5p) a) lungimea segmentului *EF*;
(5p) b) aria trapezului *ABCD*;
(5p) c) perimetrul triunghiului *ABM*.




V. Un paralelogram *ABCD* are $AB = 12$ cm, $AD = 6$ cm și $\sphericalangle BAD = 60°$. Bisectoarea unghiului *BAD* intersectează latura *CD* în punctul *E*.

(5p) a) Demonstrează că triunghiul *AEB* este dreptunghic.
(5p) b) Determină lungimile segmentelor *AE* și *BE*.
(5p) c) Demonstrează că $\sphericalangle ADB = 90°$.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

| Subiectul | I.1 | I.2 | I.3 | I.4 | II.1 | II.2 | II.3 | II.4 | III.1 | III.2 | III.3 | III.4 | IV.a | IV.b | IV.c | V.a | V.b | V.c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punctajul | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Nota | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# SOLUȚIILE TESTELOR DE AUTOEVALUARE

## 1. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

### Unitatea: RĂDĂCINA PĂTRATĂ

**Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural**

**1.** a) F; b) A; c) F. **2.** a) $\to$ 3); b) $\to$ 4); c) $\to$ 2); d) $\to$ 5). **3.** 13.

**Lecția 2. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional**

**1.** a) A; b) F; c) F. **2.** a) $\to$ 4); b) $\to$ 5); c) $\to$ 3); d) $\to$ 2). **3.** 4,79.

**Lecția 3. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical**

**1.** a) F; b) F; c) A. **2.** a) $\to$ 5); b) $\to$ 4); c) $\to$ 3); d) $\to$ 1). **3.** 7.

### Unitatea: NUMERE REALE

**Lecția 1. Numere iraționale. Numere reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$**

**1.** a) A; b) F; c) A. **2.** a) $\to$ 3); b) $\to$ 2); c) $\to$ 5); d) $\to$ 4). **3.** 24.

**Lecția 2. Modulul unui număr real**

**1.** a) F; b) F; c) A. **2.** a) $\to$ 1); b) $\to$ 3); c) $\to$ 2); d) $\to$ 5). **3.** 32.

**Lecția 3. Compararea și ordonarea numerelor reale**

**1.** a) F; b) F; c) F. **2.** a) $\to$ 3); b) $\to$ 1); c) $\to$ 2); d) $\to$ 4). **3.** $-\frac{23}{2}$.

**Lecția 4. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări**

**1.** a) F; b) A; c) A. **2.** a) $\to$ 1); b) $\to$ 2); c) $\to$ 3); d) $\to$ 5). **3.** 27.

### Unitatea: OPERAȚII CU NUMERE REALE

**Lecția 1. Introducere. Produs și cât de radicali. Raționalizare**

**1.** a) F; b) A; c) F. **2.** a) $\to$ 4); b) $\to$ 1); c) $\to$ 2). **3.** 150.

**Lecția 2. Adunarea și scăderea numerelor reale**

**1.** a) A; b) A; c) F. **2.** a) $\to$ 3); b) $\to$ 4); c) $\to$ 1); d) $\to$ 5). **3.** 14.

**Lecția 3. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale**

**1.** a) A; b) F; c) A. **2.** a) $\to$ 3); b) $\to$ 1); c) $\to$ 5); d) $\to$ 2). **3.** 0.

**Lecția 4. Puteri cu exponent număr întreg. Ordinea efectuării operațiilor**

**1.** a) F; b) A; c) A. **2.** a) $\to$ 4); b) $\to$ 3); c) $\to$ 5); d) $\to$ 1). **3.** –125.

### Unitatea: OPERAȚII CU NUMERE REALE ÎN SITUAȚII PRACTICE

**Lecția 1. Media aritmetică ponderată a *n* numere reale, $n \geq 2$**

**1.** a) A; b) F; c) A. **2.** a) $\to$ 2); b) $\to$ 4); c) $\to$ 1); d) $\to$ 3). **3.** 0.

**Lecția 2. Media geometrică a două numere reale pozitive**

**1.** a) A; b) F; c) A. **2.** a) $\to$ 4); b) $\to$ 1); c) $\to$ 3); d) $\to$ 2). **3.** 2.

**Lecția 3. Ecuația de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$**

**1.** a) A; b) A; c) A. **2.** a) $\to$ 1); b) $\to$ 3); c) $\to$ 2); d) $\to$ 5). **3.** –1.

## 2. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

**Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități**

**1.** a) F; b) A; c) A. **2.** a) $\to$ 3); b) $\to$ 1); c) $\to$ 4). **3.** $4\sqrt{2}$.

**Lecția 2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente**

**1.** a) F; b) F; c) A. **2.** a) $\to$ 2); b) $\to$ 1); c) $\to$ 3). **3.** 3.

**Lecția 3. Sisteme de ecuații liniare cu două necunoscute**

**1.** a) F; b) A; c) A. **2.** a) B; b) A; c) C. **3.** $\varnothing$.

**Lecția 4. Rezolvarea sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute. Metoda substituției și metoda reducerii**

**1.** a) A; b) A; c) A. **2.** a) $\to$ 4); b) $\to$ 1); c) $\to$ 2). **3.** –6.

**Lecția 5. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații**

**1.** a) F; b) A; c) F. **2.** a) $\to$ 3); b) $\to$ 4); c) $\to$ 1). **3.** 11.

## 3. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

**Lecția 1. Produsul cartezian a două mulțimi nevide**

**1.** a) A; b) F; c) F. **2.** a) $\to$ 2); b) $\to$ 3); c) $\to$ 1). **3.** $A = B$.

**Lecția 2. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale**

**1.** a) F; b) F; c) A. **2.** a) $\to$ 4); b) $\to$ 3); c) $\to$ 2). **3.** 0.

**Lecția 3. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale**

**1.** a) F; b) F; c) A. **2.** a) $\to$ 4); b) $\to$ 3); c) $\to$ 1). **3.** 2.

**Lecția 4. Distanța dintre două puncte din plan**

**1.** a) A; b) A; c) A. **2.** a) $\to$ 3); b) $\to$ 4); c) $\to$ 2). **3.** 5.

**Lecția 5.** Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice. **Poligonul frecvențelor**

**1.** a) A; b) A; c) F. **2.** a) $\to$ 4); b) $\to$ 1); c) $\to$ 2). **3.** 67.

## 4. PATRULATERUL

**Lecția 1. Patrulaterul convex. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex**

**1.** a) F; b) F; c) A. **2.** D. **3.** 60°.

**Lecția 2. Paralelogramul. Definiție și proprietăți**

**1.** a) F; b) F; c) A. **2.** D. **3.** 0,(3).

**Lecția 3. Aplicații în geometria triunghiului: linia mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi**

**1.** a) F; b) A; c) A. **2.** C. **3.** 7.

**Lecția 4. Dreptunghiul. Proprietăți**

**1.** a) A; b) F; c) A. **2.** D. **3.** 60°.

**Lecția 5. Rombul. Definiție și proprietăți**

**1.** a) A; b) A; c) A. **2.** a) $\to$ 1); b) $\to$ 4); c) $\to$ 5); d) $\to$ 3). **3.** 53.

**Lecția 6. Pătratul. Definiție și proprietăți**

**1.** a) F; b) A; c) F. **2.** D. **3.** 3.

**Lecția 7. Trapezul: clasificare, proprietăți. Linia mijlocie a trapezului**

**1.** a) F; b) F; c) A. **2.** D. **3.** 10.

**Lecția 8. Trapezul isoscel. Proprietățile trapezului isoscel**

**1.** a) F; b) F; c) A. **2.** a) → 4); b) → 5); c) → 3); d) → 2). **3.** 12.

**Lecția 9. Perimetre și arii: paralelogram, paralelograme particulare, triunghi, trapez**

**1.** a) A; b) A; c) A. **2.** a) → 3); b) → 4); c) → 1). **3.** 4,8.

## 5. CERCUL

**Lecția 1. Unghi înscris în cerc**

**1.** a) F; b) A; c) A. **2.** a) → 4); b) → 2); c) → 3); d) → 1). **3.** 100.

**Lecția 2. Coarde și arce. Proprietăți**

**1.** a) A; b) A; c) A; d) A. **2.** a) → 5); b) → 1); c) → 3); d) → 4). **3.** 280.

**Lecția 3. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc**

**1.** a) A; b) A; c) F; d) A. **2.** a) → 2); b) → 3); c) → 4); d) → 1). **3.** 2.

**Lecția 4. Poligoane regulate înscrise în cerc**

**1.** a) F; b) F; c) A; d) A. **2.** a) → 2); b) → 5); c) → 3); d) → 1). **3.** 9.

**Lecția 5. Lungimea cercului și aria discului**

**1.** a) A; b) A; c) A; d) F. **2.** a) → 5); b) → 1); c) → 2); d) → 4). **3.** 34.

## 6. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

**Lecția 1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante**

**1.** a) F; b) A; c) A. **2.** a) → 3); b) → 1); c) → 2); d) → 4). **3.** 0,(3).

**Lecția 2. Teorema lui Thales și reciproca teoremei lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale**

**1.** a) F; b) F; c) A; d) A. **2.** a) → 1); b) → 3); c) → 2); d) → 4). **3.** 10,5 cm.

**Lecția 3. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării**

**1.** a) F; b) F; c) A; d) A. **2.** a) → 2); b) →3); c) → 1); d) → 4). **3.** 45.

**Lecția 4. Criterii de asemănare a triunghiurilor**

**1.** a) A; b) A; c) F; d) F. **2.** a) → 3); b) → 5); c) → 1); d) → 2). **3.** 96.

**Lecția 5. Aplicații: raportul ariilor a două triunghiuri asemenea, aproximarea în situații practice a distanțelor folosind asemănarea**

**1.** a) F; b) A; c) A; d) A. **2.** a) → 4); b) → 3); c) → 1); d) → 2). **3.** 4.

## 7. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

**Lecția 1. Proiecții ortogonale. Teorema înălțimii. Teorema catetei**

**1.** a) A; b) A; c) F; d) F. **2.** a) → 4); b) → 1); c) → 3); d) → 2). **3.** 12.

**Lecția 2. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora**

**1.** a) A; b) A; c) F; d) A. **2.** a) → 3); b) → 2); c) → 5); d) → 1). **3.** 45.

**Lecția 3. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic**

**1.** a) A; b) A; c) F; d) F. **2.** a) → 3); b) → 1); c) → 5); d) → 2). **3.** 1.

**Lecția 4. Rezolvarea triunghiului dreptunghic**

**1.** a) A; b) A; c) F; d) A. **2.** a) → 5); b) → 2); c) → 1); d) → 4). **3.** 1.

**Lecția 5. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat**

**1.** a) A; b) A; c) A; d) F. **2.** a) → 3); b) → 5); c) → 4); d) → 1). **3.** 36.


ISBN 978-973-47-4153-3
edituraparalela45.ro

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL